Die Notwendigkeit des Bluffs

- Ein Beweis auf Basis der Spieltheorie -

Maturitätsarbeit von Jonas Jost

Betreut durch Lars Fleig

Kantonsschule Enge, W17e

Abgabe: 4. Januar 2021

Titelseite Erstellt auf Adobe Spark.

(Hintergrund: Ausschnitte einer Excel Tabelle aus dem praktischen Teil)

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benützung anderer als der angegebenen Quellen oder Hilfsmittel verfasst bzw. gestaltet habe.

Ort, Datum Name, Unterschrift

Zürich, 22.12.20 Jonas Jost, J. Jost

Inhalt

Abstract

Diese Arbeit verschafft einen Einblick in die Spieltheorie und dessen Möglichkeiten. Es wird gezeigt, wie bei einem beliebigen symmetrischen Spiel mit dem Simplex-Verfahren das Gleichgewicht und die optimalen Strategien gefunden werden können. Dieses Konzept wird schliesslich auf das Pokerspiel angewendet, welches sich durch dessen Popularität als Grundlage eignet. Anhand von einem eigenen Spielmodell wird bewiesen, dass der Bluff in einer Strategie mit optimaler Auszahlung notwendig ist. Es soll vermittelt werden, welche Schwierigkeiten überwunden werden müssen, um ein möglichst realitätsgetreues Spielmodell zu erstellen und dieses schliesslich zu lösen. Der Inhalt wiedergibt den Arbeitsprozess des Autors und die damit verbundenen Erkenntnisse.

Nach der Einleitung, die einen groben Überblick über die Geschichte der Spielentwicklung gibt und eine Brücke zwischen Mathematik und Spiel schafft, werden im Kapitel Theorie eingehend die spieltheoretischen und mathematischen Grundlagen erläutert. Weiterhin wird die Methode beschrieben und eine mathematische Angabe des Arbeitsprozesses vorgenommen. Im Kapitel Resultate folgen die erhaltenen Lösungen einschliesslich des Beweises mit einer Erklärung. Eine zusätzliche Schilderung der Erstellung des Spielmodells und des Lösungsverfahrens sind im Anhang mit einigen Einblicken hinterlegt. In der Diskussion werden die Resultate besprochen und in einen grösseren Kontext gesetzt.

Vorwort

Eines Abends sass ich in einer Pokerrunde, wie ich sie schon oft erlebt hatte. Meine Karten? Eigentlich gut, den Flop jedoch verfehlt. Gleich zwei Könige hatten sich unter die drei ersten Tischkarten gemischt. «Lohnt es sich wohl die gewinnende Hand vorzutäuschen?», dachte ich mir und erkannte mich in einer Situation, die mir vertraut war. Schon so oft musste ich abwägen, ob ein Bluff einen Ausweg aus dieser ungünstigen Situation bietet. Doch ich wurde aus meinen Gedanken gerissen, denn bereits hatten die zwei Spieler vor mir ihren Zug verkündet. Sie verzichteten beide auf eine Erhöhung des Wetteinsatzes und blickten mich nun ungeduldig, aber dennoch erwartungsvoll an. «Was solls», denke ich mir, «jetzt oder nie!». «Raise», murmelte ich vor mich hin und zog nun sogar die Aufmerksamkeit derjenigen Spieler auf mich, die das Spielgeschehen bereits nicht mehr verfolgten. Sogleich stieg mein Puls und es wurde mir kalt um den Körper. Die Opponenten schienen sich gar nicht mehr entscheiden zu wollen, die Sekunden verstrichen. – «Fold», sagten sie endlich, einer nach dem anderen. Es war geschafft! Meine Karten blieben verdeckt und ich konnte die Chips einnehmen und in sichtlicher Unstimmigkeit meiner Gegner auftürmen. Die Erleichterung war gross, es hat geklappt, ich konnte die zwei unpassenden Könige abwehren.

Diese Situation war es, die mich im Nachhinein zum Überlegen gebracht hat. Welch ein Glück, auch mit unpassenden Karten den Pot gewinnen zu können! Und weiter … wie oft es wohl vorkommt, dass ein Bluff eigentlich bessere Karten abwehrt? Gerade Poker, ein Spiel, das oft als Glücksspiel abgestempelt wird, erlaubte es mir, mit den schlechteren Aussichten als meine Gegenspieler, den Gewinn einzufahren. Mir wurde mehr und mehr klar, dass auch eine optimale Strategie von diesem Werkzeug profitieren müsste. Da wusste ich, dass ich mich in der wissenschaftlichen Spielanalyse vertiefen wollte. Dies war die Geburt meiner Maturitätsarbeit, die mich über ein Jahr begleitete. Der Arbeitsprozess widerspiegelt einen Prozess von mir selbst. Es öffneten sich mir zuvor unbekannte Tore und den Zugang in eine tiefere wissenschaftliche Welt.

In diesem Rahmen möchte ich mich bei denjenigen bedanken, die mich auf dieser Reise begleitet haben. Speziellen Dank an Herrn Fleig für das Betreuen und die Unterstützung. Auch vielen Dank an Marco Jost, für die Hilfe im Erstellen korrekter mathematischer Notationen und der Einführung in die Funktionen des Programmes Microsoft Excel.

1 Einleitung

Seit der Antike unterhalten sie uns, lassen uns raten und tüfteln, verlieren und gewinnen – Spiele. Was ist der Reiz an Spielen? Wieso versuchen wir sie zu verstehen? Wie bringen sie uns im Leben weiter?

Spiele erfüllen gleich eine ganze Reihe menschlicher Bedürfnisse: Sie geben uns ein Gemeinschaftsgefühl und soziale Anerkennung in einer Gruppe. Sie lassen uns zwischen Kooperation und Konflikt entscheiden. Nicht zuletzt geben sie uns die Aussicht auf eine Bereicherung, materiell oder auch immateriell. Es sind gerade diese Bedürfnisse, die uns dazu bewegen, teils stundenlang zu würfeln, Karten auszutauschen und Figuren auf einem Brett umher zu schieben. Die abstrakten Spielgegenstände sind auf den ersten Blick weit weg vom Alltag und dennoch werden sie von der breiten Masse gespielt. Was steckt also dahinter?

In vielen Spielen sind wissenschaftliche Konzepte enthalten. Gerade deshalb macht es Sinn, Spiele tiefgründig zu analysieren. Einerseits lassen sich die Spiele so besser verstehen und andererseits lässt sich das aus Spielen Gelernte auch auf andere Prozesse übertragen. Dieses zunehmend erkannte Potential hat im 20. Jahrhundert sogar zu einem eigenen Zweig der Mathematik geführt – der Spieltheorie.

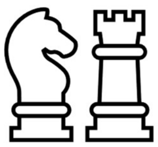
Diesem Trend folgt diese Arbeit und wirft einen mathematischen Blick auf das Spiel Poker. Basierend auf der Spieltheorie sollen dessen Spielprozesse untersucht werden und das Spiel auf eine noch folgende Bedingung geprüft werden.

1.1 Die Entwicklung von Spielen

Um ein tieferes Verständnis für Spiele zu erlangen, lohnt es sich, in einer kurzen Form die historische Entstehung von Spielen zu betrachten.

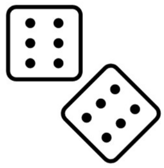
Spiele beschäftigen die Menschen schon seit der Steinzeit. Besonders aber in der Antike begann die Welt der Spiele zu blühen. Die Sprachen wurden differenzierter, die Menschen gewannen an materiellem Reichtum und eine zunehmende Zahl an Menschen musste sich nicht mehr ständig um ihre Grundbedürfnisse sorgen. Deshalb entstanden zahlreiche Spielformen, die teilweise bis in die heutige Zeit übernommen wurden. Ein gutes Beispiel bieten «polierte und markierte *Astragalus-Knöchelchen*»[1], die als Vorgänger des heutigen Würfels betrachtet werden. Die bearbeiteten Knochen-Bruchstücke, die unter anderem auf die Ägypter, Summerer und Babyloner zurückzuführen sind, gelten als älteste dokumentierte Sachquellen einer Spielform. Es handelt sich dabei um kleine Knochenteile von Schaffen, die durch ihre Form auf vier möglichen Seiten liegen bleiben können. Diese Eigenschaft hatten sich die Menschen zu Nutze gemacht und Spiele erfunden, die oft die Vorläufer der heutigen Würfelspiele waren. Allerdings waren die Ergebnisse dieser Spiele noch nicht proportional, denn die vier Seiten hatten durch Imperfektionen nicht die gleiche Wahrscheinlichkeit.[2]

Auch neben den damals populären Würfeln, haben viele Spiele unsere Vorfahren bewegt. Für jede geschichtliche Epoche lassen sich Spiele finden, die die Menschen besonders geprägt haben. Im nächsten Abschnitt ist die Geschichte dreier Spiele erläutert, die für die Entwicklung der Spiele besonders prägend und bis heute populär sind; darunter je ein Brett-, Würfel- und Kartenspiel.



Schach:

Das erste typische Schachbrett geht zurück auf das Jahr 450 n. Chr. in Indien. Es diente anfänglich für ein anderes Spiel, welches im Laufe der Zeit mit einem weiteren Spiel fusionierte. So entstand das Spiel «Chaturanga», welches als erster Vorläufer des heutigen Schachspieles gilt. Dazumal repräsentierten die Figuren die vier Divisionen des Militärs – darunter die Infanterie und Kriegselefanten. Von Indien kam das populäre Spiel schliesslich auf Handelsrouten über die Perser und die Araber nach Europa. Dabei wurde das Spiel von den verschiedenen Kulturen beeinflusst und entwickelte sich allmählich zum heutigen Schachspiel. In Europa wurden schliesslich die heutigen Figuren eingeführt, die die mittelalterlichen Sozialschichten widerspiegeln. Schach bietet durch die Anzahl möglicher Züge eine enorme Komplexität, was bis heute das Interesse von zahlreichen Personen weckt, nicht zuletzt auch jenes von Mathematiker*innen.[3]

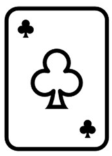


Backgammon:

Die erste eng verwandte Version des heutigen Backgammons, das «Duodecim Scripta», stammt aus dem antiken Rom. Das Spiel war populär und hatte An-

[1] Barth, Spielend Mathematik lernen 2007, S. 1
[2] Barth, Spielend Mathematik lernen 2007, S. 1
[3] Schiendorfer 2018

hänger, wie etwa der römische Kaiser Claudius, der sogar ein Buch darüber verfasste. Mit der Expansion des römischen Reiches verbreitete sich auch das Spiel in einem grossen Teil Europas. Im Mittelalter kam das Spiel durch die Kreuzzüge als «Wurfzabel» zurück nach Westeuropa, wo vor allem Adlige dem Spiel nachgingen. Anders jedoch in England, dort spielten sogar die Soldaten das Spiel, worauf der König ein Verbot für die einfache Bevölkerung erliess, um Geld zu würfeln. Im weiteren Verlauf der Geschichte blieb das Spiel, das dem heutigen bereits sehr ähnlich war, präsent. Aus einigen Namenswechseln und vereinheitlichten Regeln kam schliesslich das heutige Backgammon hervor. Die interessante Kombination von Würfelglück und strategischen Entscheidungen sind einmalig. Viele Tüftler versuchen auf die perfekte Spielstrategie zu stossen, doch immer neue Spielsituationen bereiten eine schwierige, aber spannende Aufgabe.[4]



Poker:

Das heute berühmte Spiel hat eine kürzere Geschichte als die zwei bisherigen Beispiele. So werden oft fälschlicherweise Ursprünge in einer Zeit gesucht, in der noch keine Spielkarten existierten. Erste Spielkarten, die die Grundlage für Poker sind, wurden im 13. Jahrhundert in China verwendet. Ein Jahrhundert später gelangten solche Spielkarten auch nach Europa, wo sogleich eine grosse Vielfalt an Karten entstand. Es entwickelten sich viele verschiedene Spiele, unter anderem Wettspiele. Als erster direkter Vorläufer des Pokerspiels gilt das deutsch-französische Spiel Poch (Poque), worauf auch der Name Poker zurückzuführen ist. Das Spiel wurde jedoch auch von Einflüssen anderer Spiele geprägt, wie etwa Brag und Bouillote. Anfang des 19. Jahrhunderts gelangten die Pokervorläufer durch französische Siedler nach New Orleans. Von dort aus wurde es auf den berüchtigten Mississippi-Spielsalon-Kreuzern über den Wasserweg im ganzen Osten der USA verteilt. 1836 wurde das neuartige Wettspiel erstmals unter dem Namen «Poker» schriftlich festgehalten. Weitere gesellschaftliche Bewegungen, etwa der Bürgerkrieg und der Goldrush, verbreiteten das Spiel rasant weiter. Die erste simple Pokerform mit einem Kartenset von 20 Karten wurde allmählich ersetzt durch vielseitigere Varianten mit mehr Karten und neuen Handkombinationen. Das Ziehen von Extrakarten veränderte das Spiel ebenfalls nachhaltig. Aus einem «bloßen Glücksspiel [wurde nach und nach ein] intelligente[s] Geschicklichkeitsspiel»[5]. Bis heute sind verschiedene Varianten verbreitet und werden parallel gespielt. 1970 entstand mit der World

[4] Wikipedia 2020
[5] Parlett & McLeod, 2005

Series of Poker die Welt des Turnierpokers und zugleich erneute Popularität für das Kartenspiel.[6]

Heute geniesst das Pokerspiel weltweite Popularität. Die Spielarenen reichen von der Stube bis zum internationalen Turnier. Laut Kelvin Sherwood, der sich auf Daten der World Poker Tour (WPT) bezieht, sind allein online 100 Millionen Spieler*innen tätig.[7] Dazu kommen weitere Millionen von Leuten, die zuhause Poker spielen. Es gibt zahlreiche Variationen des Pokerspiels, wobei die meistgespielte «Texas Hold'em» genannt wird. Dies ist zudem die einzige Variante, die in dieser Arbeit vorkommt und alle Berechnungen in den folgenden Kapiteln beziehen sich auf diese Spielform.

1.2 Mathematik und Spiel

Da nun ein Überblick über die Entwicklung der Spiele verschafft ist, gilt es als nächstes, die Brücke zwischen der Spielwelt und der Mathematik zu erläutern. In diesem Unterkapitel werden in chronologischer Reihenfolge die Ereignisse thematisiert, die einen Einfluss auf die heutige Spielanalyse haben.

Antike

Wie die Spiele, entwickelte sich auch die Mathematik Schritt für Schritt. In den ersten Hochkulturen wurde Mathematik vor allem als Werkzeug zur Bewältigung praktischer Probleme benutzt, zum Beispiel der Vermessung von Feldern. Dennoch sind Quellen vorhanden, in denen zur Unterhaltung zweckfremde Rätsel mit mathematischen Berechnungen gelöst werden. Diese beinhalten vor allem einfache Additions- und Quotientenprobleme. Diese einfache Mathematik hat jedoch noch nicht ausgereicht, um bereits ziemlich komplexe Spiele wie zum Beispiel «Senet», ein altägyptisches Brettspiel, zu berechnen.

Mittelalter

Im Mittelalter wurden hauptsächlich Problemstellungen basierend auf Vorgängern der heutigen Wahrscheinlichkeitsrechnung erörtert. Komplexere Spiele konnten grösstenteils nicht mathematisch erklärt werden. Ansonsten waren im Mittelalter unter den Intellektuellen mathematische Wettstreite verbreitet. Man unterbreitete sich gegenseitig Fragestellungen, die der andere zu beantworten versuchte. Zwar sind dies keine Spiele im eigentlichen Sinn, doch viele

[6] Parlett & McLeod, 2005
[7] Sherwood 2019

dieser Fragestellungen waren im Zusammenhang mit den damaligen Spielformen. Einer der Beteiligten war der bis heute bedeutende Mathematiker Leonardo Fibonacci.[8]

Renaissance

In der Renaissance wird die Mathematik hauptsächlich von den «italienischen Algebraikern»[9] angetrieben. Sie waren eine Gruppe einflussreicher Mathematiker, die sich alle gegenseitig beeinflussten. Davon haben sich besonders Tartaglia und Cardano für Spiele interessiert. Geralome Cardano war der Erste, der systematisch versuchte Glücksspiele zu analysieren. Für das Spiel mit Karten hingegen waren weiterhin keine mathematischen Grundlagen vorhanden. So bemerkte etwa Cardano im Jahr 1564: «Es gibt einen Unterschied zum Würfelspiel, denn das ist ein offenes Spiel, wohingegen das Spiel mit Karten aus dem Hinterhalt heraus erfolgt, weil sie [für die anderen Spieler] verborgen sind.»[10]

Neuzeit

Im 20. Jahrhundert entstand ein neuer Pol in der Analyse von Spielen. Zahlreiche Forscher entdeckten die Wichtigkeit von Spielen in Vorgängen der Gesellschaft. Angesichts dieser zunehmenden Popularität entstand in dieser Zeit erstmals ein eigenständiger Bereich der Mathematik, der sich ausschliesslich mit dem Lösen von Spielen befasste. Dieser neue Wissenschaftszweig geht auf verschiedene Wissenschaftler zurück, wobei oft der ungarische Mathematiker John von Neumann als Begründer genannt wird, da er die Spieltheorie in den 1920er Jahren erstmals formal beschrieb. Zudem publizierte er im Jahr 1944 gemeinsam mit Oskar Morgenstern das erste Standardwerk der Spieltheorie.[11] Um die Spieltheorie zu verstehen, ist es wichtig hervorzuheben, dass in der Forschung unter dem Wort «Spiel» nicht nur Gesellschaftsspiele gemeint sind. Der Fokus der Spieltheorie liegt auf Entscheidungssituationen mit mehreren Teilnehmern. Es werden hauptsächlich komplexe Interaktionen von sozialen und geistigen Wissenschaften analysiert. So wird in verschiedenen Anwendungsgebieten eng mit den Forschern der Spieltheorie zusammengearbeitet, etwa in der Marktwirtschaft oder der Militärführung. Durch den Einfluss auf solche wichtigen Bereiche wurde die Grundlagenforschung der Spieltheorie zusätzlich angetrieben.

Die wohl wichtigste Entwicklungsphase der Spieltheorie ereignete sich zwischen 1950 und 1970. Am Ende des 2. Weltkrieges entstand in den USA die RAND Corporation, eine kalifornische Forschungseinrichtung, die sich mit strategischen Aufgaben der United States Air Force

---

[8] Deulofeu 2016, S 20f
[9] Deulofeu 2016, S. 24
[10] Parlett und McLeod, 2005 nach Geralome Cardano
[11] Lück und Weck 2008, S. 1

befasste. Diese militärische Organisation rekrutierte zahlreiche renommierte Ökonom*innen und Mathematiker*innen aus aller Welt. Trotz der offensichtlichen Kontroverse hinter der Motivation erwies sich dieses Zusammentreffen von Forschern als «bahnbrechend für die Spieltheorie»[12].

1.3 Überblick

Die erwähnten historischen Ereignisse hatten allesamt einen Einfluss auf die heutige Spielanalyse. Besonders die Spieltheorie hat den heutigen Forschungsstand enorm beeinflusst und ermöglicht eine differenzierte Analyse von Spielen. Auch hat sie die Einbettung der Untersuchung von Spielen in einen mathematischen Kontext begünstigt. So entwickelt sich die Spieltheorie heute Hand in Hand mit Fortschritten in anderen Teilgebieten der Mathematik und anderer interdisziplinären Wissenschaften.

Es besteht eine breite Sammlung an Werken, die sich mit Fragestellungen rund um die Spielanalyse beschäftigen. Auch in diese Arbeit sind zahlreiche Quellen eingeflossen, wobei einige besonders präsent sind. Unter anderem das Buch «Glück, Logik und Bluff» von Jörg Bewersdorff, das wissenschaftliche Paper «Eine spieltheoretische Betrachtung des Pokerspiels» von Stefan Lück und Claudio Weck und dem Werk «Einführung in die Spieltheorie» von Prof. Dr. Wolfgang Leininger und PD Dr. Erwin Amann. Diese und alle weiteren Quellen sind in der Quellenangabe verzeichnet.

Die Spieltheorie wird in dieser Arbeit aufgegriffen und auf das Spiel Poker angewandt. Die Arbeit entspricht meinem eigenen Lernprozess und führte bei mir zu einem tieferen Verständnis der Spieltheorie. Im Verlauf der Recherche, die mich über die ganze Arbeit begleitete, erlaubte mein Wissensstand immer wieder neue Erkenntnisse. Mit dieser Entwicklung ist auch die Zielsetzung beziehungsweise These transformiert, wie ich untenstehend noch aufzeigen werde.

[12] Deulofeu 2016, S. 109

1.4 These

Anfangs zielte ich darauf ab, mich in den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu vertiefen und aufgrund dessen eine Strategie vorzuschlagen. Diesen Fokus verlegte ich nach eingehender Recherche und erneuerte die These. Die finale Zielsetzung gestaltet sich folgendermassen:

Das Ziel dieser Arbeit ist es, fürs Pokerspiel eine Strategie mit maximiertem Erwartungswert zu definieren und zu zeigen, dass diese das Konzept Bluff enthalten muss. Dieser Beweis soll der Spieltheorie entsprechen und anhand eines möglichst realitätsgetreuen Modells durchgeführt werden.

2 Theorie

2.1 Die Definition eines Spiels

Um Spiele im tieferen Sinne verstehen und analysieren zu können, gilt es anfänglich den Begriff «Spiel» zu definieren. Die folgende Definition wird über die ganze Arbeit beibehalten und die getätigten Einschränkungen von Spielen bleiben stets valid.

Jordi Deulofeu hat in seinem Werk «Chancen und Strategien» eine passende Eingrenzung zum Wort Spiel vorgenommen, an die sich die Definition dieser Arbeit anlehnt. [13]

Ein Spiel ist eine Handlung, die den folgenden Bedingungen unterliegt:

- Mindestens zwei Personen sind daran beteiligt
- Es ist das Ziel aller Beteiligten, ihre Gegner zu besiegen
- Jeder Spieler ist auf der Suche nach einer optimalen Strategie

Das Ziel der mathematischen Analyse von Spielen ist es demnach, für jeden Spieler eine Gewinnstrategie zu bestimmen.

Rätsel sind mathematisch von Spielen zu unterschieden, obwohl sie oftmals miteinander in Verbindung gebracht werden. Sie werden anders berechnet und zudem von der getätigten Definition ausgegrenzt. Auch Deulofeu hebt dies hervor; denn bei Rätseln «handelt es sich [zwar] um Probleme spielerischer Natur»[14], doch diese werden von einer Person gelöst. Rätsel haben folglich keine Relevanz für diese Arbeit und werden im weiteren Verlauf nicht mehr erwähnt.

2.2 Klassifikation nach Bewersdorff

In seinem Werk «Glück, Logik und Bluff» hat Bewersdorff ein System zur mathematischen Klassifikation von Spielen erstellt. Laut ihm entstehen Spiele aus der Ungewissheit, wer das Spiel gewinnen wird. Dabei erkennt er drei objektive Ursachen, die diese Ungewissheit auslösen können. In allen Gesellschaftsspielen ist mindestens einer der drei Faktoren gegeben. Um ein Spiel also einzuordnen, muss es auf diese drei Inhalte untersucht werden.[15]

---

[13] Deulofeu, Chancen und Strategien, S. 15f
[14] Deulofeu, Chancen und Strategien, S. 15
[15] Bewersdorff 2018, s. 5ff

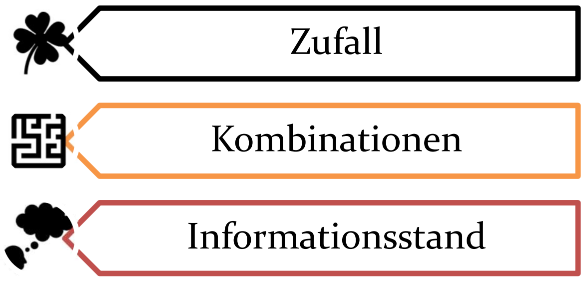


Abbildung 1: Die drei Unsicherheitsfaktoren eines Spiels

Um nun Poker richtig zu klassifizieren, habe ich zu jedem Faktor eine Fragestellung evaluiert und mir überlegt, in welchen Vorgängen die Faktoren eine Rolle spielen:

Zufall: *Spielt Glück eine Rolle? Falls ja, zu welchem Zeitpunkt?*

Ja, der Zufall spielt durchaus eine Rolle, denn in jeder Spielrunde werden Karten rein zufällig an die Spieler verteilt. In der behandelten Version Texas Hold'em sogar noch mehr, da die offenen Zusatzkarten, welche die Handkarten ergänzen, während einer Spielrunde durch Zufall die Ausgangslage weitere drei Mal beeinflussen.

Kombinationen: *Können die Spieler ihre Züge vielfältig kombinieren? Kann sich der Spieler durch solche Zugkombinationen einen Vorteil verschaffen?*

Ja, anders als bei Spielen wie Roulette, haben die Spieler verschiedene Zugmöglichkeiten; sie können passen, mitgehen oder erhöhen. Es ist wichtig, im richtigen Moment die Züge sinnvoll zu kombinieren, auch unter Betracht der eigenen Karten und der Setzposition. Allerdings ist dieser Faktor im Poker weit weniger wichtig als zum Beispiel bei Schach, wo dieser der einzig bestimmende Faktor ist. Denn ein Schachspiel gewinnt ein Spieler einzig und allein durch die geschickte Kombination von verschiedenen Zugmöglichkeiten, schliesslich fliessen weder Glück (es wird nichts «ausgelost») noch ein unterschiedlicher Informationsstand (das Spielbrett ist für beide Spieler komplett ersichtlich) in das Spiel ein.

Informationsstand: *Verfügen die Spieler über einen unterschiedlichen Stand an Informationen? Sind diese Informationen entscheidend um das Spiel zu gewinnen?*

Ja, auch dieser Faktor ist gegeben. Jeder Spieler hat seine Handkarten, die während des Bietens kein anderer Spieler zu Auge bekommt. Die Information, welches Blatt man hat, ist essenziell, um zu gewinnen. Ein Spiel mit offenen Karten würde keinerlei Sinn ergeben. Die Ungewissheit über den Spielausgang aufgrund fehlender Informationen ist typisch für das Pokerspiel und in kaum einem anderen Spiel derart entscheidend. Es ergibt sich, dass gerade dieser Faktor am wichtigsten für das Spiel ist, auch wenn die beiden anderen Faktoren ebenfalls einen grossen Einfluss haben.

Mithilfe der durchgeführten Evaluation können die Faktoren nun kombiniert und das Spiel in ein Diagramm eingeordnet werden. Auf der folgenden Abbildung von Bewersdorff ist Poker auf einem solchen Diagramm neben einigen weiteren Spielen eingezeichnet.

Abbildung 2: Gewichtung der Unsicherheitsfaktoren (Quelle: Bewersdorff, 2018)

Dieses System macht indes Sinn, da es aufzeigt, welche mathematischen Aspekte zu analysieren sind und welche allenfalls ausgeschlossen werden können. Im Pokerspiel ist dies nicht der Fall, denn das Spiel weist Ungewissheiten in allen drei Bereichen auf. Im weiteren Verlauf des Kapitels werde ich demnach auf jeden der drei Faktoren eingehen und untersuchen, wie sie das Spiel beeinflussen.

2.3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wie in der Einleitung beschrieben wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung bereits früh zur Untersuchung von Glücksspielen verwendet. Die heutige Nutzung ist breiter gefächert und etliche Prognosen sowie Risikoeinschätzungen basieren auf diesem Zweig der Mathematik.

Ganz allgemein wird versucht zu bestimmen, mit welcher *Wahrscheinlichkeit* $P(A)$ ein *Ereignis* A eintrifft. Dieser Zusammenhang wird meist als Funktion P bezeichnet. Trifft A nicht ein, spricht man vom *Gegenereignis* $\bar{A}$.[16]

Um ein Wahrscheinlichkeitsproblem zu bewältigen, ist es wichtig, die vorliegende Situation genau zu überprüfen.

[16] Burkart und Hugelshofer 2012, S. 4

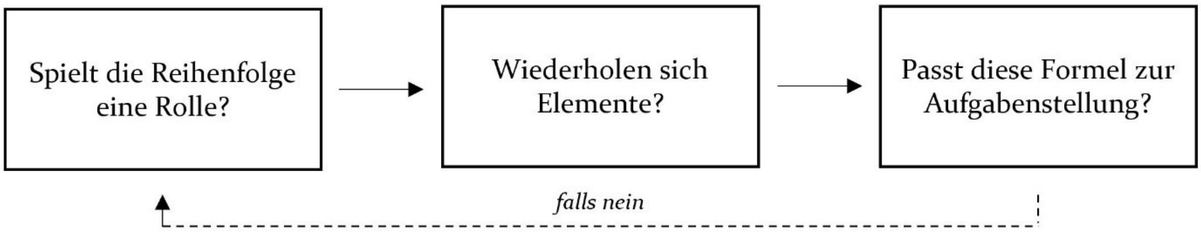


Abbildung 3: Schema zur Berechnung von Wahrscheinlichkeitsaufgaben

Fügt man diese Aspekte zusammen, lässt sich das Auswahlprinzip als Baumdiagramm darstellen. Die folgende Abbildung zeigt ein solches Diagramm mit Benennung der jeweiligen Formel.

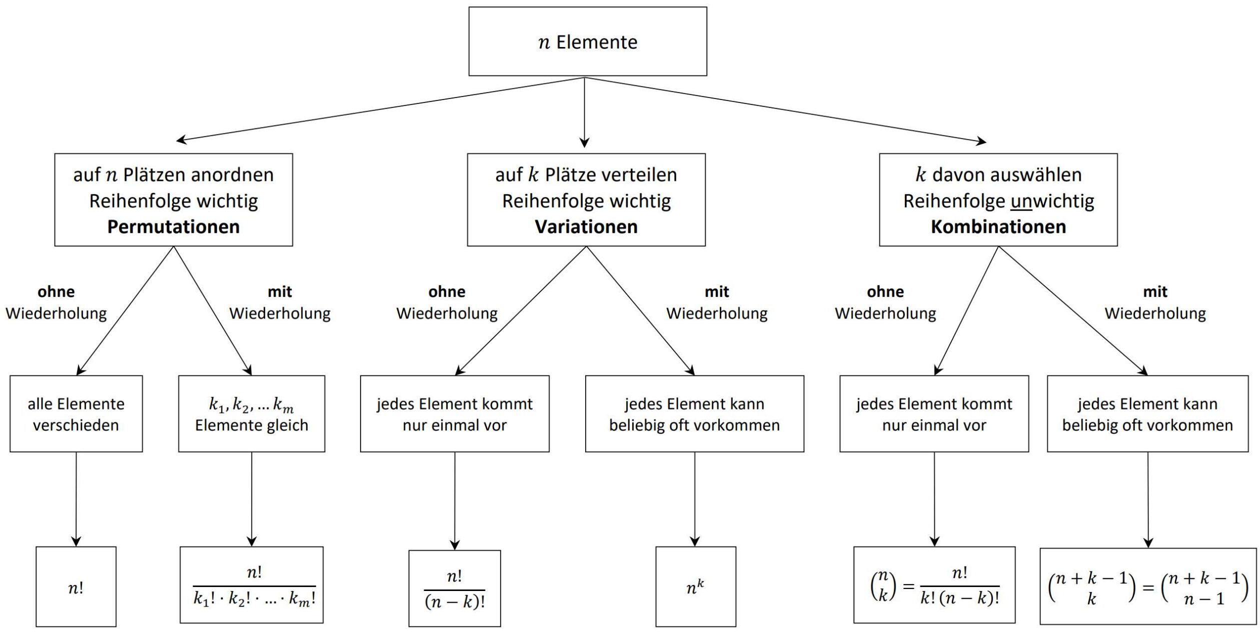


Abbildung 4: Übersicht zur Berechnung von Wahrscheinlichkeitsaufgaben (Quelle: Unterrichtsmaterial)

Da in dieser Arbeit grösstenteils Kombinationen ohne Wiederholungen untersucht werden, wird nicht tiefer auf die anderen Äste eingegangen. Bei der angewendeten Formel handelt es sich um Binominalkoeffizienten.

Binominalkoeffizienten

Sie werden dazu verwendet die Anzahl Wege ungeordnete Resultate k von n Möglichkeiten zu ziehen. Dabei ist n! die Fakultät von n.[17]

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Zum Beispiel $\binom{5}{2} = 10$, denn es gibt 10 Möglichkeiten, die Elemente k mit einem Element der Menge $n! = \{1,2,3,4,5\}$ zu kombinieren.

2.4 Spieltheorie

2.4.1 Definition der Spieltheorie

Wie bereits in Kapitel 1.2 angesprochen, ist die Spieltheorie ein eigenständiger Bereich der Mathematik, der sich mit Mehrpersonen-Entscheidungssituationen befasst. Genauer gesagt wird nach Werkzeugen gesucht, um Spielsituationen einerseits besser modellieren zu können und andererseits Vorhersagen über die Gewinnverteilung zu machen, um für jede Partei eine optimale Strategie zu finden. Die durchschnittliche Gewinnverteilung wird auch als **Wert des Spiels** bezeichnet.

«Spieltheorie = interaktive (d.h. Mehrpersonen-) Entscheidungstheorie»[18]

Die Spieltheorie unterscheidet grundsätzlich zwischen zwei Bereichen, die nicht-kooperative und die kooperative Spieltheorie. Wie es der Name bereits nahelegt, muss man sich die Frage stellen, ob die Spieler ein rein kompetitives Verhältnis haben oder allenfalls miteinander kooperieren können. Die meisten Gesellschaftsspiele bieten keine Möglichkeiten mit den Gegenspielern zu kooperieren und sind deshalb der nicht-kooperativen Spieltheorie unterzuordnen, dies ist auch im Poker der Fall.

Um Spiele mit der Spieltheorie berechnen zu können, muss die Definition in Kapitel 2.1 um zwei weitere Punkte ergänzt werden:

[17] Weisstein 2020
[18] Leininger und Amann 2008, S. 2

Verhaltenshypothese: Jeder Spieler strebt danach seinen eigenen Erwartungswert zu maximieren. [19]

Common-Knowledge-Annahme: «Die Regeln des Spieles sind allen Spielern bekannt, und alle wissen, dass diese allen bekannt sind. Ebenso wissen alle, dass allen bekannt ist, dass allen bekannt ist, dass dies alle wissen, etc. ad infinitum.»[20] Diese Bedingung wird auch als vollständige Information bezeichnet, was nicht zu verwechseln ist mit perfekter Information als Grundlage der kombinatorischen Spieltheorie.

2.4.2 Prinzipien der Spieltheorie

In der Spieltheorie ist es das Ziel für jede Partei eines Spiels die beste Strategie zu finden, wobei unter einer Strategie allgemeingültig von der «Art und Weise, wie ein Spieler seine Entscheidungen trifft»[21] gesprochen wird. Nimmt man die Strategien aller Spieler zusammen, so lässt sich der Wert des Spiels bestimmen.

In einem Spiel hat jeder Spieler p aus der Menge aller Spieler P verschiedene Handlungsalternativen A_p. Der Ausdruck «für alle» wird forthin durch $\forall$ ersetzt.

Strategie

Diejenige Handlungsalternative a_p, für die sich ein Spieler entscheidet, sei $s_p \in S_p$. Nimmt man die Entscheidung aller Spieler zusammen, lässt sich ein *Strategievektor S* bestimmen, dieser definiert den Ablauf eines Spiels. [22]

$$S = \{s_p | \forall\, p \in P\}$$

Für jedes Aufeinandertreffen von Strategien ist eine Auszahlung bestimmt. U_p sei die Auszahlungsfunktion für den Spieler $p \in P$. Diese bildet die Auszahlung des Spielers p für einen Strategievektor S ab, es gilt $U_p : A_1 \times \ldots \times A_{|P|} \rightarrow \mathbb{R}$. [23]

Die Strategien aller Spieler ausser dem einen, werden als *Fremdstrategienvektor* S_{-p} wiedergegeben.

$$S_{-p} = \{s_q | \forall\, q \in P \wedge q \neq p\}$$

Der Fremdstrategienvektor S_{-p} ist Element der Menge aller Fremdstrategievektoren Σ_{-p}.

[19] Leininger und Amann 2008, S. 13
[20] Leininger und Amann 2008, S. 13
[21] Lück und Weck 2008, S. 4
[22] Lück und Weck 2008, S. 4f
[23] Leininger und Amann 2008, S. 14

Dominante Strategie

Damit ein Spieler seine Auszahlung verbessern kann, hat er die Möglichkeit, Strategien miteinander zu vergleichen. Zwei Strategien s'_p und s_p sind äquivalent, wenn sie für alle möglichen Handlungsalternativen der Gegner dieselbe Auszahlung bewirken.

$$U_p(s'_p, S_{-p}) = U_p(s_p, S_{-p}) \quad .\forall\, S_{-p} \in \Sigma_{-p}$$

Eine Strategie $\widetilde{s_p}$ dominiert eine andere Strategie s_p, wenn sie für alle möglichen Handlungsalternativen der Gegner eine mindestens gleich hohe Auszahlung bewirkt, aber nicht äquivalent ist.

$$U_p(\widetilde{s_p}, S_{-p}) \geq U_p(s_p, S_{-p}) \quad .\forall\, S_{-p} \in \Sigma_{-p}$$

und

$$U_p(\widetilde{s_p}, S_{-p}) > U_p(s_p, S_{-p}) \quad .\,f\ddot{u}r\ mindestens\ ein\ S_{-p} \in \Sigma_{-p}$$

Die zweite Bedingung erzwingt eine Eindeutigkeit in den Dominanzen. So können sich zwei Strategien nicht gegenseitig dominieren. Aus der Verhaltenshypothese kann zudem entnommen werden, dass ein Spieler niemals eine dominierte Strategie wählen darf.

Rationalitätsprinzip

In der Verhaltenshypothese wurde die Bedingung festgelegt, dass ein Spieler seinen eigenen Erwartungswert verbessern will. Nach diesem Prinzip wird ein Spieler nicht irgendeine Strategie wählen, sondern die *optimale Strategie* s_p^*, welche ihm die höchste *Auszahlung* U_p verspricht, wenn alle anderen auch ihren Erwartungswert maximieren.[24]

$$s_p^* = \arg\max U_p(\, s_p | S_{-p})$$

Die Schwierigkeit beim Bestimmen einer solchen optimalen Strategie ist, dass alle anderen Spieler bereits eine Strategie ausgewählt haben müssen, was in der Praxis kaum zutrifft.

Nash Equilibrium

Das Rationalitätsprinzip schreibt jedem Spieler vor, seine Strategie solange zu ändern, bis er seinen Nutzen nicht mehr erhöhen kann. Hat jeder Spieler eine Strategie gefunden, mit der sein Nutzen nicht mehr verbessert werden kann, entsteht ein Gleichgewicht. Dieses Gleichgewicht wird als Nash-Equilibrium bezeichnet, da der Mathematiker John Nash diesen Zustand 1950 erstmals festgehalten hat.

---

[24] Lück und Weck 2008, S. 5

Die sinnliche Bedingung eines Nash-Equilibriums ist die Zufriedenheit aller Spielparteien mit der Wahl ihrer Strategie nach der Auszahlung. Würde ein Spieler seine Strategie bereuen und diese wechseln wollen, so würden zukünftige Spielpartien ein verändertes Ergebnis haben. Nash betitelt diesen Fall als «eine instabile Lösung»[25,26]

Mathematisch kann diese Bedingung als Erfüllung des Rationalitätsprinzips für alle Spieler gleichzeitig aufgefasst werden. Der *Strategienvektor S* ist ein Gleichgewicht, wenn gilt: [27]

$$S = S^* \Leftrightarrow s_p = \arg\max U_p(\, s_p \big| S_{-p}) \; \forall \; p \; \in P$$

Normalform

Die Normalform eines Spieles ist als Tripel (P, A_p, U_p) definiert.[28] Sie beinhaltet demnach alle Spieler, deren Handlungsalternativen und die jeweiligen Auszahlungen. Soll ein Spiel gemäss Spieltheorie analysiert werden, so wird es immer zuerst in diese Form gebracht. Für ein Spiel mit zwei Spielern wird die Normalform als Auszahlungsmatrix dargestellt, wobei auf den Achsen jeweils alle Handlungsalternativen eines Spielers aufgelistet sind. Die Handlungsalternativen eines Spielers, können als Spalten- bzw. Zeilenvektor aufgenommen werden, die gemeinsam eine Matrix ergeben, welche die Auszahlungswerte angibt.

Zusätzliche Spieler oder Umstandsunterscheidungen führen jeweils zu einer weiteren Dimension und somit zu einer erschwerten Berechnung. Dreidimensionale Normalformen lassen sich in Form eines Tensors darstellen. Bei zusätzlichen Dimensionen ist eine Veranschaulichung nicht mehr möglich, die mathematischen Operationen bleiben jedoch zulässig.

Extensivform

Die Extensivform berücksichtigt im Gegensatz zur Normalform die sequenzielle Abfolge von Spielzügen. Sie wird in Form eines Spielbaums modelliert, welcher oftmals den Überblick über eine Spielsituation erleichtert. *Bäume* sind gemäss der Graphentheorie Graphen, die keine Zyklen aufweisen. Die einzelnen Punkte nennt man *Knoten*. Diese sind durch *Kanten* verbunden. Ein Baum wird beginnend bei der *Wurzel* durchlaufen, wobei keine Rückwärtsbewegungen erlaubt sind. Bei jedem Knoten muss ein Spieler zwischen verschiedenen Handlungsalternativen unterscheiden. Die Endpunkte sind die Blätter und repräsentieren jeweils den Auszahlungswert für einen bestimmten Track. [29,30]

---

[25] Deulofeu 2016, S.120
[26] Nash 1950, S.3
[27] Lück und Weck 2008, S. 5
[28] Leininger und Amann 2008, S. 14
[29] Löh 2010, S. 1ff

Um auch simultane Situationen extensiv darzustellen, kann auf Informationsbezirke zurückgegriffen werden. Informationsbezirke sind ein Raum im Spielbaum, in dem sich ein Spieler zu einem Zeitpunkt befindet. Umfasst ein Informationsbezirk mehrere Knoten, so muss der Spieler seine Wahl treffen, obwohl er nicht weiss, wo er sich tatsächlich befindet, denn er kennt die Entscheidung des anderen Spielers nicht. Eine solche Gruppe von Knoten wird auch «Informationsset»[31] genannt. Mit diesem Kunstgriff kann künstlich eine Reihenfolge erzwungen werden, auch wenn eigentlich zur selben Zeit entschieden wird.

2.5 Kombinatorische Spieltheorie

Besteht eine Strategie, die mindestens äquivalent ist mit <u>allen</u> anderen Strategien, ist sie die optimale Strategie $s_p^* \in S_p$. Dies trifft zu für eine Strategie des Spielers p, wenn:

$$U_p\left(s_p^*, S_{-p}\right) \geq U_p\left(s_p, S_{-p}\right) \quad . \forall\, s_p \neq s_p^* \; und \; \forall\, S_{-p} \in \Sigma_{-p}$$

Existiert eine solche absolut dominante Strategie für alle Spieler, so kann das Spiel mit der kombinatorischen Spieltheorie gelöst werden. In der kombinatorischen Spieltheorie werden Spiele behandelt, die für jeden Spielzug eine eindeutige beste Handlungsalternative aufweisen. Solche optimalen Strategien $s_p^* \in S_p$, setzen genau auf eine Handlungsalternative und werden deshalb als *reine Strategie* bezeichnet. Kann ein Spiel mit reinen Strategien gelöst werden, spricht man von einem «deterministischen Spiel»[32]. Ein deterministisches Spiel ist gekennzeichnet durch einen Sattelpunkt. Dieser entspricht dem Auszahlungswert, der durch die reinen Strategien repetitiv realisiert wird. Doch wie kann einem Spiel vorhergesagt werden, ob reine Strategien vorhanden sind?

Bestimmtheitssatz

Der Mathematiker Ernest Zermelo hat sich am Anfang des 20. Jahrhunderts mit dieser Frage beschäftigt. Er erörterte, ob das Schachspiel deterministisch sei. Unter Anwendung der Mengenlehre ist er zum Schluss gekommen, dass dies zutrifft. Denn jeder Spieler könne unabhängig vom anderen Spieler den Ausgang des Spiels erzwingen. Weiterhin wird bei fehlerfreier Spielweise beider Spieler ein Resultat erreicht, welches konstant ist. Um seinen *Bestimmtheitssatz* zu beweisen, hat Zermelo 1913 seine Theorie auf ein beliebiges Spiel erweitert.

---

[30] Alós-Ferrer und Ritzberger 2008, S.217
[31] Resnik 1987, S. 122
[32] Deulofeu 2016, S. 94

Er definiert fünf Eigenschaften, die erfüllt sein müssen, um von einem deterministischen Spiel zu sprechen.[33]

> I. Das Spiel wird von zwei Personen gespielt.
> II. Der Gewinn des einen Spielers ist gleich dem Verlust eines anderen Spielers.
> III. Das Spiel endet nach einer begrenzten Zahl von Zügen, und jeder Spieler hat immer nur endlich viele Zugmöglichkeiten.
> IV. Das Spiel weist perfekte Informationen auf, das heisst, alle Informationen über den erreichten Spielstand liegen beiden Spielern offen.
> V. Es gibt keine zufälligen Einflüsse.

Weiter sagt der Bestimmtheitssatz aus, dass die Normalform deterministischer Spiele immer die folgende Eigenschaft aufweist:[34]

$$Maximin = Minimax$$

Der Maximin- und Minimax-Wert nach Zermelo sind folgendermassen zu verstehen; das Maximin ist diejenige Strategie s_p, die aus den kleinsten möglichen Auszahlungen die höchste verspricht. Das Minimax ist diejenige Strategie s_p, die aus den höchsten möglichen Auszahlungen für den Gegenspieler die kleinste verspricht.[35]

Determinismus im Pokerspiel

Es stellt sich die Frage, ob auch Poker ein deterministisches Spiel ist. Um dies zu beantworten, kann das Pokerspiel auf die fünf Bedingungen Zermelos überprüft werden:

I. Der erste Faktor ist im Poker nicht zwingend gegeben, aber auch nicht ausgeschlossen. Pokerrunden bestehen oft aus mehr als zwei Personen, aber das Heads-Up würde sich gut eignen, da dieses immer von zwei Personen ausgespielt wird.
II. Der zweite Faktor ist im Poker erfüllt. Wenn ein Spieler eine gewisse Summe an Chips verliert, müssen diese an den Gewinner der Wettrunde abgegeben werden. Es gibt keine Situation, in der Chips «verloren», beziehungsweise dem Spiel entnommen werden.
III. Der dritte Faktor ist teilweise passend. Zwar hat ein Spieler immer endlich viele Zugmöglichkeiten, doch das Spielende ist vor dem Spiel nicht definiert. Es endet erst, wenn einer

---

[33] Bewersdorff 2018 nach E. Zermelo, S. 100
[34] Bewersdorff 2018, S. 101
[35] Deulofeu 2016, S. 98

der Spieler alle Chips in seinen Besitz gebracht hat. Nach wie vielen Zügen diese Situation erreicht wird, variiert von Runde zu Runde stark. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, könnte man zur Analyse eine Spielform verwenden, die mit einer künstlichen Regel ein Ende definiert.

IV. Der vierte Faktor trifft eher weniger gut auf Poker zu, denn jeder Spieler hat seine verdeckten Handkarten, die nur er sehen kann. Ein Spiel mit aufgedeckten Karten würde seinen Anreiz verlieren und hätte die Charakteristika eines reinen Glückspiels.

V. Auch der fünfte Faktor ist nur mässig geeignet. Mit jeder aufgedeckten Tischkarte wird das Spiel vom Zufall beeinflusst und der Spielverlauf verändert. Diese Bedingung könnte umgangen werden in einer Spielform, in der alle Karten vor den Wettrunden bereits bestimmt sind. So wäre der Einfluss des Zufalls zwar nicht vernichtet, doch er würde vor die aktive Phase verschoben sein.

Das Pokerspiel ist demnach kein deterministisches Spiel. Ein Sattelpunkt gibt es nicht und das Konzept der reinen Strategien ist nicht anwendbar. Ein angepasstes Spielmodell könnte in eine deterministische Form gezwungen werden, doch würde es seinen Reiz verlieren. Besonders ein Spiel mit offenen Karten macht keinen Sinn.

2.5.1 Anwendungsbeispiel - Gefangenendilemma

Das Gefangenendilemma eignet sich als Beispiel, um die Anwendung der kombinatorischen Spieltheorie aufzuzeigen. Zwar hat das Gefangenendilemma keinen rein kooperativen Charakter wie etwa Poker, doch die wichtigsten Identitäten bleiben bestehen.

Das Gefangenendilemma ist eine Entscheidungssituation zwischen zwei Parteien. Die Ausgangssituation sind zwei Verbrecher, Spieler A und B, die beide aus zwei Aktionen a und b auswählen können. Die beiden Tatverdächtigen werden einzeln verhört und können nicht miteinander kommunizieren. Sie müssen sich entscheiden zwischen a = Leugnen (schweigen) oder b = Gestehen (den anderen verraten). Ihr Strafmass hängt vom realisierten Strategienpaar ab, das heisst, wie die beiden Spieler als Kollektiv gehandelt haben.[36]

Auszahlungsmatrix

Die Abbildung 5 zeigt die Normalform des Gefangenendilemmas. Jedes Feld der Matrix zeigt die Auszahlungswerte für Spieler A und B in Abhängigkeit des realisierten Strategienpaars. Ein

---

[36] Leininger und Amann 2008, S. 7

hoher Wert in der Matrix ist in diesem Fall äquivalent mit einer niedrigen Strafe und umgekehrt.

		Spieler B	
		a	b
Spieler A	a	$4, \quad 4$	$1, \quad 5$
	b	$5, \quad 1$	$2, \quad 2$

Abbildung 5: Auszahlungsmatrix Gefangenendilemma (Quelle: Leininger und Amann, 2008)

Spielbaum

Die Abbildung 6 zeigt die extensive Form des Gefangenendilemmas als Spielbaum. Die Wurzel ist die Entscheidung von Spieler A. Da im Gefangenendilemma eine simultane Entscheidung vorliegt, muss für den Spieler B ein Informationsbezirk erstellt werden. Dieser weiss nicht, auf welchem der beiden Knoten B er sich befindet. Die Kanten zeigen jeweils Handlungsalternativen a und b und die Blätter zeigen die Auszahlungswerte.

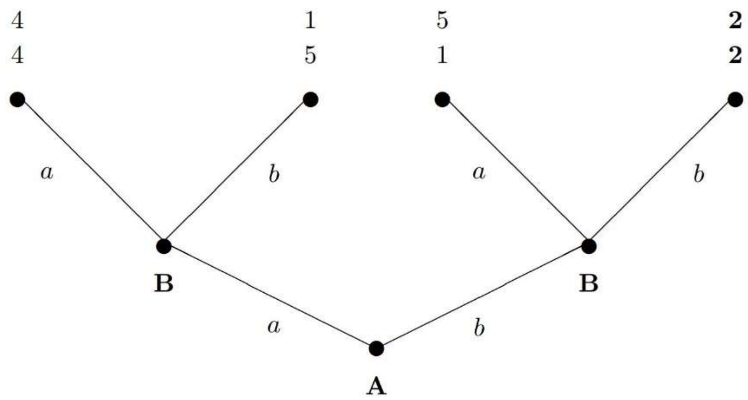


Abbildung 6: Spielbaum Gefangenendilemma (Quelle: Leininger und Amann, 2008)

Strategie

Um das Spiel auszuwerten, muss für beide Spieler eine Strategie gefunden werden. Mit dem Bestimmtheitssatz kann geprüft werden, ob das Spiel tatsächlich einen Sattelpunkt hat und infolgedessen reine Strategien zulässt. Bestimmt man den Minimax- und Maximin-Wert, so ergibt sich:

$$Minimax = Maximin = 2$$

Um dies auch nachvollziehen zu können, kann man die Überlegungen simulieren, die die beiden Spieler gemäss der Verhaltenshypothese machen müssen, um ihren Erwartungswert zu verbessern. Da das Spiel symmetrische Auszahlungswerte aufweist, sind diese Überlegungen für beide Spieler identisch. Folglich reicht es, aus dem Blick eines Spielers zu analysieren, hier aus Sicht des Spielers A:

> Der Spieler A kann zwischen den Strategien a und b auswählen. Wählt er a, so würde er, je nach B's Entscheidung, entweder 4 oder 1 ausgezahlt bekommen. Wie würde Spieler B auf den Fall A habe a reagieren? Er würde die Strategie b wählen, denn so würde A's Auszahlung von 4 auf 1 minimiert werden. Demnach unterliegt das Strategienpaar (a,a) dem Strategienpaar (a,b). Wählt Spieler A nun aber b, erzielt A entweder die Auszahlung 2 oder 5. Spieler B wiederum, würde ebenfalls auf b setzen, um A's Wert auf 2 minimieren. A würde somit 2 erhalten, weil Spieler B der Strategie b, b entgegnen würde (Strategienpaar (b,b)). Wägt Spieler A die Strategienpaare (a,b) und (b,b) gegeneinander ab, ist die Strategie b besser, weil der Auszahlungswert dann 2 beträgt und nicht wie zuvor 1.[37]

Diese Erklärung verdeutlicht den Sattelpunkt (b,b) und damit auch die reinen Strategien b. Beide Spieler müssen auf die dominante Strategie b zurückgreifen.

$$s_p^* = Strategie\ b\ (Geständnis)$$

Dieses Beispiel zeigt den pessimistischen Charakter der Spieltheorie. Auf den ersten Blick scheint es klar, dass das Strategien-Tupel (a,a) realisiert werden müsste, da dessen Auszahlungswerte höher ausfallen als im Strategien-Tupel (b,b). Jedoch ist es wichtig zu erkennen, dass eine dominante Strategie nicht «Pareto-optimal»[38] sein muss. Vielmehr geht es darum, unter der Berücksichtigung der Strategien aller Gegenspieler, den eigenen Gewinn zu maximieren.

Im Gefangenendilemma stellt das Strategien-Tupel (b,b) und somit das Auszahlungsfeld (2,2) das Gleichgewicht nach Nash dar. Dieses Gleichgewichtsfeld ist per Definition die einzige stabile Lösung und repräsentiert deswegen den *Wert des Spiels*.[39] Dieser Erwartungswert liesse sich nur noch durch einen Fehler eines Spielers verändern.

---

[37] Leininger und Amann 2008, S. 8
[38] Leininger und Amann 2008, S. 17
[39] Leininger und Amann 2008, S. 8

2.6 Strategische Spieltheorie

Die strategische Spieltheorie ist ein weiteres Teilgebiet der Spieltheorie. Dabei stehen Spielsituationen im Vordergrund, die nicht mit reinen Strategien gelöst werden können. Die strategische Spieltheorie ist sehr wichtig, um reale Konkurrenzsituationen zu analysieren, da in vielen kompetitiven Umgebungen imperfekte Informationen vorliegen. Bisher konnten nur Spiele mit Sattelpunkt gelöst werden. Für Spiele ohne Sattelpunkt, sprich $Maximin > Minimax$, bieten reine Strategien keine Lösung. Denn dies würde bedeuten, dass ein Spieler ein kleineres Minimum erwarten kann, als der andere zu verlieren erwartet. Eine dominante Strategie existiert nicht. Um das Spiel trotzdem zu lösen, ist eine Erweiterung der bisher aufgeführten reinen Strategie nötig.

Gemischte Strategie

Die Lösung dazu bieten gemischte Strategien. Anstelle einer reinen Strategie werden verschiedene Handlungsalternativen kombiniert. Eine *gemischte Strategie* m_p für Spieler $p \in P$ teilt jeder *Handlungsalternative* $a_p \in A_p$ eine *Wahrscheinlichkeit* q zu.

Die Wahrscheinlichkeiten q_i müssen im Intervall $[0,1]$ liegen und $i \in (1, \dots, |A_p|)$ seien die einzelnen verfügbaren reinen Strategien für einen Spieler. Die Summe aller q_i muss immer 1 ergeben.[40]

$$m_p \in M_P \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ \cdots \\ q_{|A_p|} \end{pmatrix} \middle| \sum_{i=1}^{|A_p|} q_i = 1 \right\}$$

Der grosse Unterschied zu reinen Strategien liegt darin, dass in gemischten Strategien die Wahl der Handlungsalternative verdeckt bleiben muss. Bis anhin war dies nicht nötig, da eine reine Strategie durch ihre Dominanz auch bei der Durchschauung durch den Gegenspieler bestehen bleibt. Bei gemischten Strategien muss die tatsächliche Wahl der Handlungsalternative dem Zufall überlassen werden, denn nur so kann ein Spieler sich vor jeglicher Ausnutzung der Informationen vom Gegenspieler und somit auch vor einer Verkleinerung des Erwartungswerts schützen.

Die Menge aller reinen Strategien S_p ist eine Teilmenge aller gemischten Strategien M_p:

$$S_p \subset M_p$$

[40] Lück und Weck 2008, S. 6

Strategieraum

Alle zulässigen Strategien können zusammengefasst als Simplex dargestellt werden. Es lässt sich jede gemischte Strategie $m_p \in M_p$ als Punkt im Einheitssimplex $\mathbb{R}^{A_p}$ betrachten. Der Raum $\mathbb{R}^{A_p}$ ist die Menge aller möglichen gemischten Strategien M_p und hat. $A_p + 1$ Ecken. Jede Handlungsalternative führt zu einer zusätzlichen Achse. Auf der Abbildung 7 ist beispielshaft ein Einheitssimplex für Spiele mit 3 Handlungsalternativen abgebildet.

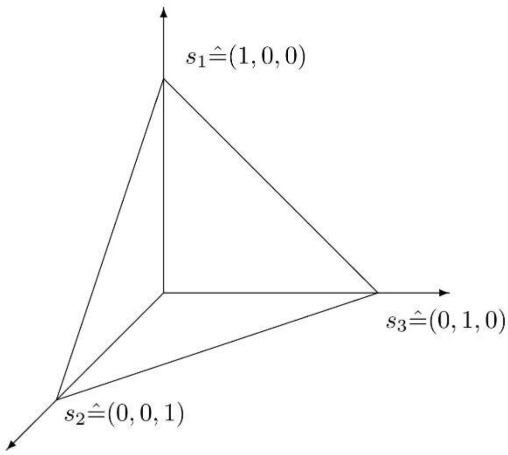


Abbildung 7: Strategieraum als Einheitssimplex (Leininger und Amann, 2008)

Diejenigen Ecken, die sich auf einer Achse befinden $\{s_1, s_2, s_3\}$, sind gleichbedeutend mit den möglichen reinen Strategien, da jeweils nur genau eine Handlungsalternative gewählt wird. Alle weiteren Punkte im Diagramm, inklusive Ecken, die keine Achse tangieren, sind gemischte Strategien.[41]

Simplex

Ein Simplex ist in der Geometrie eine «tetraedrische Region im Raum mit n Dimensionen»[42]. Jeder Parameter[siehe 43] führt zu einer weiteren Dimension. Mit jedem zusätzlichen Parameter fügt man einen Punkt hinzu, den man kegelbildend mit den Ecken eines $(n-1)$-dimensionalen Simplex verbindet. So entstehen mit zunehmenden Dimensionen: Punkt, Strecke, Dreieck, Tetraeder, ... Dies ist auch sinnvoll bei einer Anzahl Dimensionen, die unsere Wahrnehmung vom Raum übertreffen, weil dennoch geometrische Analysen möglich sind.[44,45]

---

[41] Leininger und Amann 2008, S. 26f
[42] Weisstein, 2020
[43] **Hier: Anzahl *Handlungsalternativen* a_p**
[44] Wikipedia, 2020
[45] Bewersdorff 2018, S. 270

Auszahlungen bei gemischten Strategien

Bei gemischten Strategien ergibt sich die Auszahlung aus der Summe aller Einzelauszahlungen gewichtet mit den Wahrscheinlichkeiten, dass diese Handlungsalternative gewählt wird.[46]

$$U_p\left(s_p \middle| S_{-p}\right) = \sum_{i=1}^{|A_p|} q_i \times \mathrm{U}_p\left(\mathrm{a}_{p,i} \middle| S_{-p}\right)$$

Zudem bewiesen Nash und andere Mathematiker, dass in jedem Spiel mit endlichen Handlungsalternativen ein Gleichgewicht in gemischten Strategien vorliegt.[47] Demzufolge kann immer eine gemischte Strategie gefunden werden, die das Rationalitätsprinzip für alle Spieler erfüllt. Eine gemischte Strategie, welche die höchstmögliche Auszahlung garantiert, ist die optimale gemischte Strategie m_p^*.

$$m_p^* = \arg\max U_p(\, s_p | S_{-p})$$

Diese ist Element der Menge aller optimalen gemischten Strategien M_p^*.

$$m_p^* \in M_p^*$$

2.6.1 Anwendungsbeispiel - Schere, Stein, Papier

Das jedem bekannte «Schere, Stein, Papier» ist geeignet, um die Gegenstände der strategischen Spieltheorie zu verdeutlichen. Wie bereits beim Gefangenendilemma handelt es sich um eine simultane Entscheidungssituation zweier Spieler. Die Abbildung 8 zeigt die Normalform für das Spiel «Schere, Stein, Papier».

		Spieler 2		
		Schere	Stein	Papier
Spieler 1	Schere	0 ; 0	-1 ; 1	1 ; -1
	Stein	1 ; -1	0 ; 0	-1 ; 1
	Papier	-1 ; 1	1 ; -1	0 ; 0

Abbildung 8: Auszahlungsmatrix «Schere, Stein, Papier» (Quelle: Lück und Weck, 2008)

[46] Lück und Weck 2008, S. 6
[47] Lück und Weck 2008, S. 6

Sattelpunkt

Das Spiel «Schere, Stein, Papier» hat keinen Sattelpunkt, da der Maximin-Wert (-1) kleiner ist als der Minimax-Wert (1). Alle reinen Strategien werden teilweise dominiert von einer anderen Strategie. Deshalb führen reine Strategien in diesem Beispiel zu keinem Gleichgewicht und würden nur einen Erwartungswert von -1 zulassen. Infolgedessen muss auf gemischte Strategien zurückgegriffen werden.

Um dies zu verdeutlichen hilft die folgende Betrachtung:

Spieler 1 kann sich mit einer reinen Strategie nur einen Auszahlungswert von -1 *erhoffen, da jede seiner Handlungsalternativen durch eine Antwort des Gegenspielers auf* -1 *minimiert werden kann. Spieler 2 wiederum müsste wiederum von einer Auszahlung* 1 *für Spieler 1 ausgehen, da er mit einer beliebigen reinen Strategie dieses Resultat nicht ausschliessen kann.*

Gemischte Strategie

Dem Rationalitätsprinzip entsprechend ist die optimale gemischte Strategie m_p^* gesucht. Es gilt die Wahrscheinlichkeiten q_i zu bestimmen, welche die Auszahlung U_p maximiert. Da drei Handlungsalternativen vorhanden sind:

$$m_p^* = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Die Normalform legt nahe, dass nur die gleichmässige Wahl der drei Handlungsalternativen zielführend ist, da sich die Auszahlungen symmetrisch verhalten. Es liegen pro Spalte und Zeile dieselben Auszahlungswerte vor, einzig die Reihenfolge ist vertauscht. Demnach:

$$q_1 = q_2 = q_3$$

Da zudem nach Definition die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss, lässt sich sagen:

$$m_p^* \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \middle| q_1 = q_2 = q_3 \cap \sum_{i=1}^{3} q_i = 1 \right\}$$

Infolgedessen:

$$q_{1,2,3} = \frac{1}{3}$$

Diese gemischte Strategie entspricht der Gleichgewichtsstrategie, sie führt zu einem Erwartungswert von 0. Die Spieler müssen mit einer Gewichtung q zufällig zwischen den Handlungsalternativen auswählen, wobei in diesem Beispiel eine Gewichtung von $1:1:1$ gilt.[48] Entsprechend den Gleichgewichtsstrategien nähert sich die Auszahlung des Spiels langfristig dem Wert 0 an, was dem Wert des Spiels entspricht. Im Spiel «Schere, Stein, Papier» hat sich die Gewichtung der Handlungsalternativen intuitiv ergeben. Im nächsten Kapitel wird ein allgemeines Lösungsverfahren vorgestellt, mit dem ein beliebiges symmetrisches Spiel gelöst werden kann.

2.7 Das Lösen eines symmetrischen Spieles

2.7.1 Symmetrische Spiele

Bereits im Kapitel 2.6.1 wurde am Beispiel «Schere, Stein, Papier» ein symmetrisches Spiel gezeigt. Nun soll die allgemeine Definition eines symmetrischen Spiels erfolgen:

> Die Gleichgewichtsstrategie nach Nash muss in einem symmetrischen Spiel für alle Spieler gleich sein.[49] Der Wert des Spiels im Gleichgewicht muss 0 betragen und lässt deshalb für beide Spieler keine positiven Gewinnerwartungen zu. Sobald eine gemischte Strategie demnach eine Auszahlung von mindestens 0 einbringt, ist diese zwingend optimal.[50]

Werden symmetrische Spiele dargestellt, so kann man von einer Normalform mit jeweils gegensätzlichen Auszahlungen ausgehen. Die allgemeine Normalform eines symmetrischen Spielers gestaltet sich gemäss der Abbildung, wobei in diesem Fall ein Spiel mit 3 Handlungsalternativen pro Spieler gewählt ist. Diese Anzahl könnte beliebig erweitert werden.

Schwarz wählt ... **Weiß wählt ...**	**1**	**2**	**3**
1	0	a	-b
2	-a	0	c
3	b	-c	0

Abbildung 9: Auszahlungsmatrix eines allgemeinen symmetrischen Spiels (Quelle: Bewersdorff, 2018)

Symmetrische Spiele haben durch ihre Definition eine zentrale Eigenschaft, die der Mathematiker Émile Borel entdeckte. Mischt ein Spieler seine reinen Strategien mit den Wahrschein-

[48] Bewersdorff 2018, S. 249
[49] Lück und Weck 2008, S. 6
[50] Bewersdorff 2018, S. 254

lichkeiten $\left\{q_1, \dots, q_{|A_p|}\right\}$, so müssen die Gewinnerwartungen gegen die gegnerische Partei mindestens gleich 0 sein. Mathematisch kann dies als eine Reihe von Ungleichungen aufgenommen werden. Für die Matrix in Tabelle gilt:[51]

$$\begin{aligned} -aq_2 + bq_3 &\geq 0 \\ +aq_1 \quad - cq_3 &\geq 0 \\ -bq_1 + cq_2 \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

Unter den Bedingungen:

$$\forall\, q \geq 0$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

2.7.2 Minimax-Satz

John von Neumann hat Borels Untersuchungen weitergeführt und daraufhin den *Minimax-Satz* definiert. Es handelt sich dabei um eine Erweiterung der von Zermelo eingeführten Identität in Kapitel 2.5. Neumann definiert den Maximin-Wert neu als das Optimum, das Spieler 1 erreichen kann, wenn ihn Spieler 2 durchschaut hat. Analog dazu steht der Minimax-Wert für das Optimum, das Spieler 2 erreichen kann, wenn ihn Spieler 1 durchschaut. Die wichtige Erkenntnis, die er daraus zieht, ist der Trick, die Gleichheit beider Werte zu erzwingen, indem die Spieler «in einer konkreten Partie [mit dem Faktor q_i] zufällig [zwischen den Handlungsalternativen] auswählen»[52]. Mit dieser Idee, die die Grundlage von gemischten Strategien darstellt, kann auch ohne vorhandene reine Strategien ein Gleichgewicht nach John Nash gefunden werden. Neumann schlägt vor, dass jedes Nullsummenspiel solche Minimax-Strategien voraussetzt. Dabei seien die Anzahl der Spieler nicht relevant, wobei Spiele mit zwei Spielern einfacher lösbar sind.

2.7.3 Lösungsverfahren

John von Neumann vermutete bereits, dass das Lösen von Zwei-Personen-Nullsummenspielen äquivalent sei mit der linearen Optimierung. Dies bestätigte sich später und legte deshalb nahe, dass auch solche Spiele als lineare Optimierungsaufgaben angesehen werden können.

---

[51] Bewersdorff nach Émile Borel, S. 254
[52] Bewersdorff nach John von Neumann, S. 257

In der linearen Optimierung kann beispielsweise die Produktion eines Unternehmens optimiert werden, indem man verschiedene Produkte und deren dazu benötigte Ressourcen betrachtet. Die verschiedenen Produkte sind die Parameter. Die Produktionsfaktoren, stellen jeweils eine Nebenbedingung in Form einer Ungleichung dar. Alle Punkte, die alle Nebenbedingungen erfüllen, können in einem Koordinatensystem mit ebenso vielen Achsen wie Parameter gekennzeichnet werden. Der so eingegrenzte Lösungsraum ist ein Simplex. Um die optimale Produktion zu erkennen, muss der Punkt mit dem grössten Überschusswert gefunden werden. Gesucht ist demnach der Punkt mit dem grössten Ortsvektor des Ursprungs. Der optimale Punkt liegt immer in einer Ecke, da ansonsten durch eine Verschiebung der Parameter zwingend ein höherer Überschusswert gefunden werden kann.

Dieses Prinzip kann 1: 1 auf Nullsummenspiele angewendet werden. Statt Produkten sollen nun die optimalen gemischten Strategien gefunden werden, die somit ein Gleichgewicht bewirken. Die Handlungsalternativen können als zu optimierende Parameter aufgenommen werden und mit dem Ungleichungssystem von Borel können die Nebenbedingungen definiert werden.

Die eigentliche Optimierung kann mit verschiedenen Lösungsverfahren erfolgen. Die gebräuchlichste ist der sogenannte Simplex Algorithmus von George Dantzig.[53]

2.7.4 Simplex Algorithmus

Der im Allgemeinen als Simplex-Verfahren bekannte Algorithmus von Dantzig wird in der Spieltheorie häufig auch als MaxiMin-Algorithmus bezeichnet.[54] Das Verfahren basiert auf der geometrischen Betrachtung des Simplex-Lösungsraums.[55] Man macht sich zu Nutze, dass das Optimum immer auf einer Ecke liegen muss. Dabei wird vom Ursprung aus den Kanten entlang von Ecke zu Ecke bewegt, wobei immer geprüft wird, ob eine Erhöhung der Auszahlung erreicht wird. Ist dies nicht der Fall bewegt man sich zurück auf die letzte optimierte Ecke. Kann kein besserer Wert mehr erreicht werden so befindet man sich auf dem Optimum. Diese Bewegung ist im eigentlichen Sinn die Änderung jeweils eines Parameters. [56]

Das Prinzip des Simplex-Algorithmus soll nun beispielhaft am allgemeinen symmetrischen Spiel aus Kapitel 2.7.1 gezeigt werden. Die Parameter sind die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten q. Diese sollen ausgehend von $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, Schritt für Schritt bis zum Zielwert

---

[53] Bewersdorff 2018, S. 267-272
[54] Lück und Weck 2008, S. 12
[55] **Für eine Definition eines Simplex siehe Kapitel 2.6. In der Spieltheorie ist der Simplex-Raum die Menge aller möglichen gemischten Strategien.**
[56] Bewersdorff 2018, S. 271-275

optimiert werden. Dieser Zielwert Z ist in klassischen linearen Optimierungsaufgaben die zu optimierende Gleichung. In der Spieltheorie ist dieser Zielwert die Summe aller Handlungsalternativen, womit der Zielwert von $Z = 1$ bereits bestimmt ist. Für das Beispiel gestaltet sich der Zielwert folgendermassen:

$$Z = q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

Wichtiger als der Zielwert selbst, sind in der Spieltheorie die verschiedenen Parameter q_i, die unter der Erfüllung der Nebenbedingungen den Zielwert erreichen. Die Nebenbedingungen sind das Ungleichungssystem, dass durch die Symmetrie des Spiels gegeben ist. Sind sie erfüllt, so erhält man zwingend die bestmögliche Auszahlung. Weiter können die Nebenbedingungen mit dem Einführen von Schlupfvariablen in Gleichungen umgewandelt werden. Diese sind einfacher zu lösen als Ungleichungen. Hier sind die Nebenbedingungen zu Gleichungen erweitert mit den Schlupfvariablen $[x_1, x_3]$.

$$\begin{aligned} x_1 &= -aq_2 + bq_3 \\ x_2 &= +aq_1 - cq_3 \\ x_3 &= -bq_1 + cq_2 \end{aligned}$$

$$. q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Kombiniert man den Zielwert mit den Nebenbedingungen so ergibt sich:[57]

$$\begin{aligned} Z &= q_1 + q_2 + q_3 \\ x_1 &= -aq_2 + bq_3 \\ x_2 &= +aq_1 - cq_3 \\ x_3 &= -bq_1 + cq_2 \end{aligned}$$

Dieses System kann mit dem Simplex-Algorithmus gelöst werden. Es gilt das folgende Schema anzuwenden:

57 Bewersdorff 2018, S. 272-275

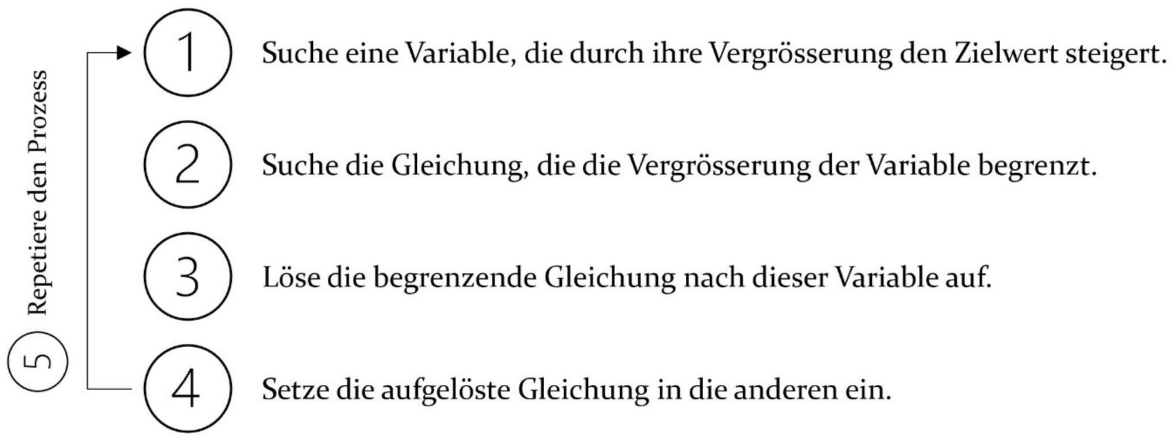


Abbildung 10: Rechnungsprozess des Simplex-Verfahrens

Ist keine weitere Vergrösserung des Zielwerts möglich, ist das Optimierungsproblem gelöst. In der Spieltheorie können die erhaltenen Werte überprüft werden, da der Zielwert zwingend 1 sein muss. Die erhaltenen Wahrscheinlichkeiten q entsprechen der Gleichgewichtsstrategie für alle Spieler, weil es sich um ein symmetrisches Spiel handelt.

3 Methode

3.1 Spielregeln

Als erstes habe ich mir vorgenommen, die wichtigsten Spielregeln und den Ablauf des Texas Hold'em Poker zusammenzufassen, um eine Basis für die anschliessenden Berechnungen zu haben. Um fachgerecht zu erklären, habe ich mich am Buch «Poker-Schule Texas Hold'em» von Markus Müller orientiert. [58]

Texas Hold'em Poker wird mit einem klassischen französischen Kartenset gespielt, ein Deck besteht aus 52 Karten. Dabei gibt es vier Farben mit jeweils 13 Karten, diese reichen von zwei bis Ass. Das Ziel ist es, ein besseres Blatt als die Gegner zu haben oder sie davon zu überzeugen, dass man eines hat, ein sogenannter «Bluff». Die Spieler erhalten zu Beginn jeder Runde zwei Handkarten. Diese werden kombiniert mit fünf Tischkarten, die im Verlauf der Runde aufgedeckt werden und für alle Spieler gelten. So werden die fünf besten Karten zu einem Blatt kombiniert. Auf der Abbildung 11 auf der nächsten Seite sind die verschiedenen möglichen Blätter abgebildet, wobei oben jeweils weiter unten schlägt.

Hat man die zwei eigenen Handkarten einmal erhalten, versucht man, sich in mehreren Runden gegen die Gegner durchzusetzen. Man wettet also sozusagen auf seine eigenen Karten. Anfangs liegen noch keine Karten in der Mitte. Im Verlauf der Runde werden dann insgesamt fünf Karten vom Stapel aufgedeckt; zuerst drei «Flop», dann jeweils eine «Turn» & «River». Die Spieler, deren Ziel es ist, den Pot (Wetteinsatz aller Spieler) zu gewinnen, kommen der Reihe nach zum Zug und können aus folgenden verschiedenen Aktionen auswählen:

BET: Dies ist die erste Wette einer Runde. Ein Spieler erhöht den Pot um eine gewisse Anzahl. Alle anderen Spieler müssen entscheiden, ob sie mitkommen oder aufgeben.

CALL: Der Spieler kommt mit und gleicht die Wette eines vorherigen Spielers aus.

FOLD: Der Spieler gibt auf und muss seine Karten an den Dealer abgeben. Er hat somit kein Anrecht mehr auf den Pot.

CHECK: Der Spieler setzt nichts und schiebt an den nächsten Spieler weiter. Dies ist nur möglich, wenn kein Spieler zuvor den Einsatz erhöht hat.

---

[58] Müller 2007, S. 18-22

RAISE: Der Spieler gleicht zuerst die BET aus und erhöht gleich nochmal den Einsatz. Wie viel mindestens und höchstens gewettet werden darf, variiert je nach gespieltem Modus.

Blatt	Erklärung	Bei zwei gleichen gewinnt
	Royal Flush 10, Bube, Dame, König und Ass in einer Farbe	
	Straight Flush fünf aufeinanderfolgende Karten in einer Farbe	Wert der Endkarte
	Four of a Kind (Vierling) vier gleiche Karten	Wert des höchsten Vierlings
	Full House drei gleiche Karten & zwei gleiche Karten	Wert des höchsten Drillings
	Flush fünf beliebige Karten in einer Farbe	Wert der höchsten Karte
	Straight (Straße) fünf aufeinanderfolgende Karten in beliebigen Farben	Wert der höchsten Karte
	Three of a Kind (Drilling) drei gleiche Karten	Wert des höchsten Drillings bzw. der höchsten Beikarte
	Two Pairs (zwei Paare) zweimal zwei gleiche Karten	Wert des höchsten Paares bzw. der höchsten Beikarte
	One Pair (ein Paar) zwei gleiche Karten	Wert des höchsten Paares bzw. der höchsten Beikarte

Abbildung 11: Die Pokerblätter und ihre Rangfolge (Quelle: Müller, 2007)

Insgesamt wird vier Runden lang gewettet. Einmal Pre-Flop, einmal nach dem Flop und je einmal nach dem Turn und River. Falls im Verlauf dieser Runden alle Spieler folden, weil sie nicht bereit sind, die Wette eines Mitspielers zu bezahlen, gewinnt dieser den Pot. Wenn bis am Schluss jedoch noch mehrere Spieler dabei sind, kommt es zu einem «Showdown». Dies bedeutet, dass die Karten aufgedeckt werden und der Spieler mit dem besten Blatt ausgemacht wird, dieser gewinnt den Pot.

Das Ende des Spiels hängt von der Spielform ab, man unterscheidet zwischen Cash Game und Turnier. In Letzterem zahlt man einen vorgegebenen Starteinsatz und versucht damit, bis am Ende durchzuhalten. Wer seinen Einsatz verloren hat, der scheidet aus. So geht es weiter, bis ein einziger Spieler übrigbleibt, welcher das Spiel gewinnt. Die Gewinnverteilung erfolgt unter den Spielern, die bis zu den Gewinnrängen durchgehalten haben, alle anderen verlieren ihren gesamten Einsatz. Bei einem Cash Game hingegen kann man jederzeit dazu stossen oder seine restlichen Chips auszahlen lassen. Es ist also auch möglich, dass Spieler mit unterschiedlichen Beträgen einsteigen.[59]

3.2 Projekt 1: Wahrscheinlichkeit im Pokerspiel

Anfänglich hatte ich das Ziel, mich in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die ebenfalls einen Unsicherheitsfaktor im Pokerspiel darstellt, zu vertiefen und dadurch eine Strategie vorzuschlagen. Im Verlauf der Bearbeitung und Recherche musste ich jedoch einsehen, dass diese Methode nicht zielführend sein wird. Einerseits bietet die Spieltheorie bessere Möglichkeiten, ein komplexes Spiel zu erforschen und andererseits geriet ich bereits bei der Berechnung der Blattwahrscheinlichkeiten in eine Sackgasse. Das bereits bessere Verständnis des Sachverhalts und der Spieltheorie ermöglichte es mir zu diesem Zeitpunkt, den Fokus der Arbeit anzupassen.

Im Anhang sind dennoch meine Erkenntnisse im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung geschildert. Es wird gezeigt, wie ich mithilfe des Programms Microsoft Excel die Wahrscheinlichkeiten von bestimmten Blättern berechnen wollte und welche Schwierigkeiten sich ergaben. Diese Schilderung ist insofern wichtig, da ich mir dadurch ein tieferes Verständnis, des Programms Microsoft Excel und des behandelten Spiels, aneignen konnte. Dieses Projekt hat jedoch keinen Einfluss auf die These und stellt einen Exkurs dar. Sollte dies für den Leser nicht relevant sein, so kann er den Teil I im Anhang ignorieren.

3.3 Projekt 2: Die Notwendigkeit des Bluffs

3.3.1 Zielsetzung

Das zweite Projekt geht direkt auf die Fragestellung ein und soll die Notwendigkeit des Bluffs beweisen. Zu diesem Zweck wird ein eigenes Spielmodell erschaffen, welches möglichst nahe am tatsächlichen Texas Hold'em Poker liegen soll. Das Modell muss ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel sein, sodass es anhand des, in Kapitel 2.7 präsentierten, Lösungsverfahrens gelöst werden kann. Es gilt anschliessend, für das eigene Spielmodell die Gleichgewichtsstrate-

[59] Müller 2007, S. 8f

gien zu bestimmen und diese auf das Enthalten des Konzepts Bluff zu prüfen. Um die Notwendigkeit des Bluffs zu beweisen, muss gezeigt werden, dass die Menge aller gemischter optimaler Strategien eine Teilmenge aller Strategien ist, die einen Bluff enthalten.

$$M_p^* \overset{?}{\subseteq} M_p(Bluff) \quad .für\ eigenes\ Spielmodell$$

3.3.2 Bluff

Um die Gleichgewichtsstrategien auf Bluffs überprüfen zu können, muss zuerst eine Definition des Begriffs erfolgen. Damit die gesetzte Bedingung als bewiesen erklärt werden kann, muss mindestens einer der zwei Punkte vorliegen.

Unter dem Begriff «Bluff» versteht man ganz allgemein die Möglichkeit, mit entsprechenden Handlungen eine Gegebenheit vorzutäuschen. Auf das Pokerspiel übertragen bedeutet «Bluff» demnach die Möglichkeit eines Spielers mit seinen Spielaktionen ein Blatt vorzutäuschen, welches er nicht besitzt. Zusammenfassend gibt es für einen Spieler zwei Gründe, dieses Konzept anzuwenden:

1. «bei (wirklicher) Schwäche den (falschen) Eindruck von Stärke erwecken»[60]
2. «bei (wirklicher) Stärke den (falschen) Eindruck von Schwäche zu erwecken» [61]

Im ersten Szenario gibt ein Spieler vor, gute Karten zu haben und versucht mit Wetteinsätzen einen Showdown zu verhindern. Im zweiten Szenario gibt ein Spieler vor, schlechte Karten zu haben und versucht durch eine passive Spielweise möglichst wenige Spieler zum Aussteigen zu bewegen. In beiden Fällen ist das Ziel, den Gegner zu täuschen. In dieser Arbeit soll der erste Fall untersucht werden, da dieser den allgemein bekannten Bluff repräsentiert.

3.3.3 Reflektion des Poker-Modells Bewersdorff

Jörg Bewersdorff hat in seinem Buch ein interessantes vereinfachtes Poker-Modell präsentiert und dieses ausgewertet. Dieses dient als Grundlage für mein eigenes Modell. In einem ersten Teil wird sein Modell erklärt und nachvollzogen. Anschliessend hinterfrage ich das Modell und widme mich allfälligem Verbesserungspotential.

Aufbau

Seine Spielsituation gestaltet sich folgendermassen:[62]

---

[60] Bewersdorff 2018, s. 236
[61] Bewersdorff 2018, s. 236
[62] Bewersdorff 2018, S. 263 ff

- Zwei Spieler
- Beide Spieler müssen einen Grundeinsatz von 8 Einheiten setzen
- Sie erhalten von ihrem eigenen unabhängigen Kartenstapel je eine Karte, diese ist entweder tief oder hoch (T/H)
- Spieler 1 kann wählen zwischen:
  - Passen → *Sofortiger Showdown um* 8
  - Einsatz von 8 auf 12 erhöhen
- Falls Spieler 1 erhöht, kann Spieler 2 wählen zwischen:
  - Passen → *Spieler 2 verliert* 8
  - Einsatz von 12 begleichen → *Showdown um* 12

Die Spielregeln lassen sich in einem Entscheidungsbaum veranschaulichen:

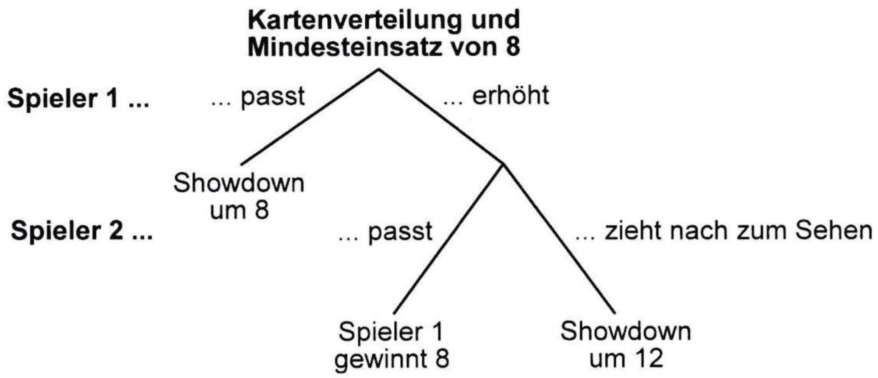


Abbildung 12: Entscheidungsbaum des Pokermodells von Bewersdorff (Quelle: Bewersdorff, 2018)

Das Spiel erlaubt beiden Spielern vier verschiedene Handlungsalternativen. Der erste Buchstabe steht jeweils für die Aktion beim Erhalten der tiefen Karte T, der zweite Buchstabe für die Aktion beim Erhalten einer hohen Karte H. Man gehe davon aus, beide Spieler haben ihre Strategie bereits vor dem Erhalten festgelegt.

Spieler 1: PP, PE, EP, EE

Für beide Kartenhöhen kann der Spieler 1 entscheiden, ob er seinen Einsatz erhöht oder passt. So ergeben sich vier Kombinationen.

Spieler 2: PP, PS, SP, SS

Spieler 2 kann für beide Kartenhöhen entscheiden, ob er den Einsatz auf 12 ausgleichen will oder nicht. Falls Spieler 1 sich für passen entscheidet, liegt für Spieler 2 keine Entscheidung vor. Dennoch muss er im Rahmen der Spieltheorie bereits vor diesem Ereignis eine Handlungsalternative wählen.

Normalform

Die Gestaltung der Normalform ist in diesem Spiel komplexer als in den Beispielen zuvor, da mit der zufälligen Kartenverteilung eine externe Wahrscheinlichkeitsvariable in das Spiel aufgenommen wird. Deswegen wird eine Umstandsunterscheidung notwendig, die gemäss dem Unterkapitel Normalform in Kapitel 2.4 eine weitere Ebene erfordert. Und führt, wie es auch ein zusätzlicher Spieler tun würde, zu einem Tensor statt einer Bimatrix. Diese Umstandsunterscheidung kann gemäss der Spieltheorie auch als Spieler verstanden werden, der das Ziel verfolgt, die Karten möglichst zufällig zu verteilen.

Mit einem Trick kann dennoch eine gewöhnliche Matrix erstellt werden. Die Spieler müssen in ihren Strategien eine Handlungsalternative für beide Fälle aufnehmen und werden somit nicht von der eigentlichen Karte beeinflusst. In einer eigenen 4×4 Matrix werden alle möglichen Kartenverteilungen simuliert und ausgewertet. Da alle Kartenverteilungen mit derselben Wahrscheinlichkeit eintreffen, können diese ohne einen zusätzlichen Faktor summiert werden. Diese Summe entspricht dem durchschnittlichen Auszahlungswert beim Aufeinandertreffen zweier Handlungsalternativen. Dieser Wert wird schliesslich in alle Felder der Matrix eingetragen. Diese neu erstellte Matrix nenne ich forthin ***Major-Matrix.*** Die Abbildung 2 zeigt die Normalform als Major-Matrix mit beispielhaft aufgeführten Fallsimulationen. Um die Auszahlungswerte zu vereinfachen, teilt Bewersdorff die Werte mit dem Divisor 4, was in diesem Modell durch die bestimmten Spielregeln aufgeht.

		Spieler 2			
		PP	**PS**	**SP**	**SS**
Spieler 1	**PP**	0	0	0	0
	PE	2	0	3	1
	EP	6	1	4	-1
	EE	8	1	7	0

	N:S	H:S
N:P	0	-8
H:E	12	0

	N:S	H:P
N:E	0	8
H:E	12	8

Abbildung 13: Normalform des Pokermodells von Bewersdorff (Quelle: Bewersdorff, 2018)

Elimination dominierter Strategien

Analysiert man diese Matrix, stösst man auf einige Gegebenheiten. Zum einen ist das Spiel unfair; der Wert des Spiels beträgt nicht 0, Spieler 2 kann sogar nur in einem einzigen Fall einen positiven Wert einfahren. Des Weiteren werden nach dem Prinzip aus Kapitel 2.4 je zwei reine Strategien dominiert:

Für Spieler 1:

I. $U_p\left(s_p^{PE}, S_{-p}\right) \geq U_p\left(s_p^{PP}, S_{-p}\right) \quad .\forall\, S_{-p} \in \Sigma_{-p}$

II. $U_p\left(s_p^{EE}, S_{-p}\right) \geq U_p\left(s_p^{EP}, S_{-p}\right) \quad .\forall\, S_{-p} \in \Sigma_{-p}$

Für Spieler 2:

I. $U_p\left(s_p^{PP}, S_{-p}\right) \geq U_p\left(s_p^{PS}, S_{-p}\right) \quad .\forall\, S_{-p} \in \Sigma_{-p}$

II. $U_p\left(s_p^{SP}, S_{-p}\right) \geq U_p\left(s_p^{SS}, S_{-p}\right) \quad .\forall\, S_{-p} \in \Sigma_{-p}$

Dominierte Strategien finden auch in gemischten Strategien keine Anwendung, da ihr Anteil immer von einer dominierenden Strategie übernommen werden kann. Deswegen können dominierte Strategien aus der Matrix ausgeschlossen werden. Wird dies angewendet, ergibt sich die Matrix in Abbildung 14.

		Spieler 2	
		PS	**SS**
Spieler 1	**PE**	0	1
	EE	1	0

Abbildung 14: Vereinfachte Normalform des Pokermodells von Bewersdorff (Quelle: Bewersdorff, 2018)

Gleichgewicht

Die vorliegende Normalform kann nur mit gemischten Strategien gelöst werden. Da in der vereinfachten Matrix zudem ein symmetrisches Spiel entstand, müssen die Gleichgewichtsstrategien für alle Spieler gleich sein. Die Analogie der summierten Werte pro Spalte und Zeile sagt zudem eine gemischte Minimax Strategie mit $1:1$ Zufallsverhältnis voraus. Wie bereits im Anwendungsbeispiel «Schere, Stein, Papier» in Kapitel 2.6.1, ergibt sich so das Gleichgewicht, ein weiteres Lösungsverfahren ist nicht nötig. Demnach für beide Spieler:

$$m_p^* = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Der Wert des Spiels beträgt 0.5.

Reflektion

Sowohl Spieler 1, als auch Spieler 2 müssen in einer Gleichgewichtsstrategie bei einer tiefen Karte zu 50 % mitgehen, beziehungsweise erhöhen. Bereits ein solch einfaches Spielmodell zeigt indes die Notwendigkeit des Bluffs. Jedoch werden durch die gewählten Spielregeln einige Charakteristika des Pokerspiels nicht differenziert genug betrachtet. Ich habe mir deshalb überlegt, wie dieses Modell ausgebaut werden könnte, um näher an der Realität zu liegen.

Einige Faktoren lassen sich kaum verändern. Ein Spiel mit drei Spielern etwa, würde das Spiel enorm erschweren und somit das Niveau einer Maturarbeit übersteigen. Zudem ist ein Spiel mit zwei Spielern durchaus realitätsgetreu, da dies dem Heads-Up entspricht. Die Kartenanzahl hingegen könnte erhöht werden. Bei einem Spiel mit bloss zwei Karten, geht die Möglichkeit verloren, eine Karte zu haben, die sowohl siegen als auch verlieren könnte. Weiterhin ist es nicht passend, dass in Bewersdorffs Modell sogar mit einem «Fold» ein Showdown erzwungen werden kann. Es wäre besser geeignet, eine reale Blindstruktur einzuführen, die beiden Spielern einen Einsatz vorgibt, den sie durch das Aussteigen verlieren.

3.3.4 Eigenes Modell

Im Modell von Bewersdorff sind doch einige Spielregeln stark vereinfacht und verleiten zu einem Spiel, das die typische Struktur des Pokerspiels verliert. Deshalb habe ich mich dazu entschieden, für den Beweis ein eigenes Spielmodell zu erstellen, das näher am eigentlichen Pokerspiel liegt. Es soll ein Spiel sein, das sich am Modell Bewersdorff orientiert, aber dessen Schwächen ausmerzt. Jedoch führt jede Aufhebung einer Approximation zu einer stark vergrösserten Normalform. Deshalb musste ich mit weiterhin möglichst vielen Approximationen eine möglichst realitätsgetreue Spielversion erstellen, was mich zu einigen Kompromissen gezwungen hat.

Ich habe mich entschieden, das Modell auf Microsoft Excel umzusetzen. Dieses Kapitel zeigt die mathematischen Überlegungen hinter dem Erstellprozess des Modells. Die Umsetzung auf Microsoft Excel ist im Anhang vorzufinden. Das Spiel musste in eine Normalform gebracht werden, um eine Lösung auf spieltheoretischer Ebene zu ermöglichen. Die finale Normalform des Spielmodells als Matrix ist in den Resultaten in Kapitel 4 aufgeführt und erklärt.

Spielaufbau

Mithilfe der Reflektion des vorherigen Spielmodels habe ich ein eigenes Poker-Modell erstellt. Es soll so gut wie möglich ein Heads-Up repräsentieren. Ich habe mich für ein Modell mit realer Blindstruktur entschieden. Spieler 1 ist der «Small-Blind» und Spieler 2 der «Big-Blind». Für Spieler 1 gilt es, den Einsatz zu verteidigen. Er kann entweder *folden,* verliert damit aber seinen Einsatz, da Spieler 2 mit dem Big-Blind von 2 bereits mehr geboten hat, *callen* und damit einen Showdown um je 2 erzwingen oder auf 4 *raisen,* womit dann Spieler 2 an die Reihe kommt. Spieler 2 kann seinerseits *folden* und verliert damit seinen Einsatz von 2 oder *callen* und somit einen Showdown um je 4 herbeirufen. Die Abbildung 15 zeigt das Modell als Spielbaum.

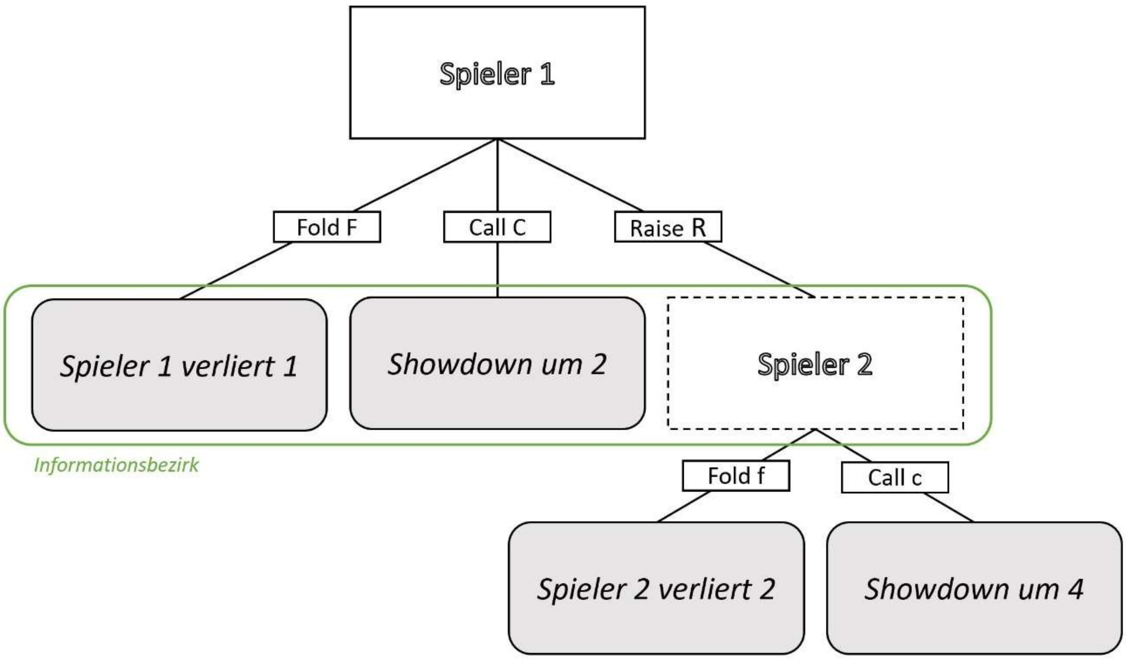


Abbildung 15: Entscheidungsbaum des eigenen Pokermodells

Am Anfang jeder Runde erhalten die Spieler jeweils zufällig eine Karte. Dabei gibt es drei Kartenhöhen; Hoch H, Mittel M und Tief T. Im Fall eines Showdowns gewinnt die bessere Karte den gesamten Einsatz. Sind die Karten gleich, so nimmt jeder Spieler seinen Einsatz zurück.

Um die These zu bestätigen, muss eine optimale gemischte Strategie für Spieler 1 mit einer Wahrscheinlichkeit von > 0 bei tiefer Karte einen Raise vorsehen.

Approximationen

Das Spielmodell beinhaltet Approximationen, um das tatsächliche Pokerspiel zu vereinfachen und damit die Berechnung der Gleichgewichtsstrategien zu ermöglichen. Hier folgt eine Liste mit allen Approximationen:

- Zwei Spieler
- Beide Spieler bekommen eine Karte von einem eigenen Stapel
- Beide Spieler starten mit demselben Anfangskapital von mindestens 4
- Drei verschiedene Kartenhöhen (T/M/H)
- Einsätze sind nicht variabel, aber verdoppeln sich standardmässig
- Kein Re-Raise möglich

Handlungsalternativen

Um das Spiel in seine Normalform zu bringen, müssen anfangs alle Handlungsalternativen gefunden werden. Da jeder Spieler seine Strategie in der Spieltheorie von Anfang an bekannt geben muss, bestehen die Handlungsalternativen aus einer Aktion pro mögliche Kartenhöhe. Es mussten deshalb alle möglichen Variationen der Aktionen und Kartenhöhen erstellt werden. Der erste Buchstabe steht für die Entscheidung bei tiefer Karte, der zweite Buchstabe für die Entscheidung bei mittlerer Karte und der dritte Buchstabe für die Entscheidung bei hoher Karte. Eine reine Strategie für Spieler 1 kann zum Beispiel die Form FFF oder FCR haben. Alle Handlungsalternativen, die für die tiefe Karte einen Raise «R» vorsehen, stellen Bluff-Strategien dar. Berechnet man alle verfügbaren Handlungsalternativen, so ergeben sich für Spieler 1 $3^3 = 27$ reine Strategien und für Spieler 2 $2^3 = 8$ reine Strategien.

Normalform

Durch die Kartenausteilung wird, wie bereits im Modell Bewersdorff beschrieben, eine externe Wahrscheinlichkeitsverteilung in das Spiel integriert. Dadurch fällt eine Umstandsunterscheidung zwischen den verschiedenen Kartenverteilungen an. Diese Umstandsunterscheidung bringt eine weitere Dimension ins Spiel und wirkt sich auf die Normalform aus, als würde ein zusätzlicher Spieler aufgenommen werden. Deswegen ist es möglich, die Umstandsunterscheidung als Spieler zu sehen, der das Ziel verfolgt, die Karten möglichst regelmässig zu verteilen. Da dieses Ziel bei einer Zufallswahl immer erfüllt ist, hat dieser neu definierte Spieler keinen Einfluss auf die Gleichgewichtslage. Dies macht Sinn, um eine zusätzliche Definition für Umstandsunterscheidungen vorzubeugen und das Spiel simpel zu halten. Gerade bei Spielen mit einer grossen Menge von Spielern und Umstandsunterscheidungen macht dies Sinn.

Durch die Umstandsunterscheidung kann die Darstellung als Matrix nur über Umwege erreicht werden. Die verschiedenen Kartenverteilungen erfordern jeweils eine Ebene. Für jede mögliche Kartenverteilung muss eine eigene Auszahlungsmatrix aufgestellt werden. Es bestehen neun mögliche Kartenverteilungen, wobei der erste Buchstabe jeweils für Spieler 1 steht und der zweite für Spieler 2.

Kartenverteilungen: TT, TM, TH, MT, MM, MH, HT, HM, HH

Die zusätzliche Dimension wird zu einem späteren Zeitpunkt mit einer Aufsummierung der einzelnen Umstandsmatrizen wieder aufgelöst. Zunächst müssen die neun Auszahlungsmatrizen für jede Kartenverteilung bestimmt werden. Für die einzelnen Auszahlungswerte war eine Fallunterscheidung notwendig, weil nicht alle Auszahlungen von der Kartenhöhe abhängig sind. Erfolgt ein Showdown, so müssen die Karten in den Auszahlungswert miteinbezogen werden. Steigt ein Spieler aus, kommt es zu einer fixen Auszahlung.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Unabhhängig von Karten					Abhängig von Karte			
2			Spieler 2					Spieler 2	
3			f	c				f	c
4	Spieler 1	F	-1	-1		Spieler 1	F		
5		C					C	2	2
6		R	2				R		4

Tabelle 1: Umstandsunterscheidung der Abhängigkeit der Kartenhöhen (Screenshot: Microsoft Excel)

Ein positiver Wert entspricht einem Gewinn von Spieler 1 und ein negativer Wert einem Gewinn von Spieler 2. Die Aktionsfälle, die abhängig von den Karten sind und somit einem Showdown entsprechen, müssen mit einem Kartenverteilungskoeffizienten KV multipliziert werden. Dieser entsteht durch die Kartenhöhen. Zum Beispiel:

TT: *Spieler 1 hat eine tiefe Karte, Spieler 2 auch. Bei einem Showdown gewinnt keiner der beiden.* $\Rightarrow KV = 0$

MH: *Spieler 1 hat eine mittlere Karte, Spieler 2 eine hohe. Bei einem Showdown gewinnt Spieler 2.* $\Rightarrow KV = -1$

Die Auszahlungswerte können mit dem folgenden Schema generiert werden.

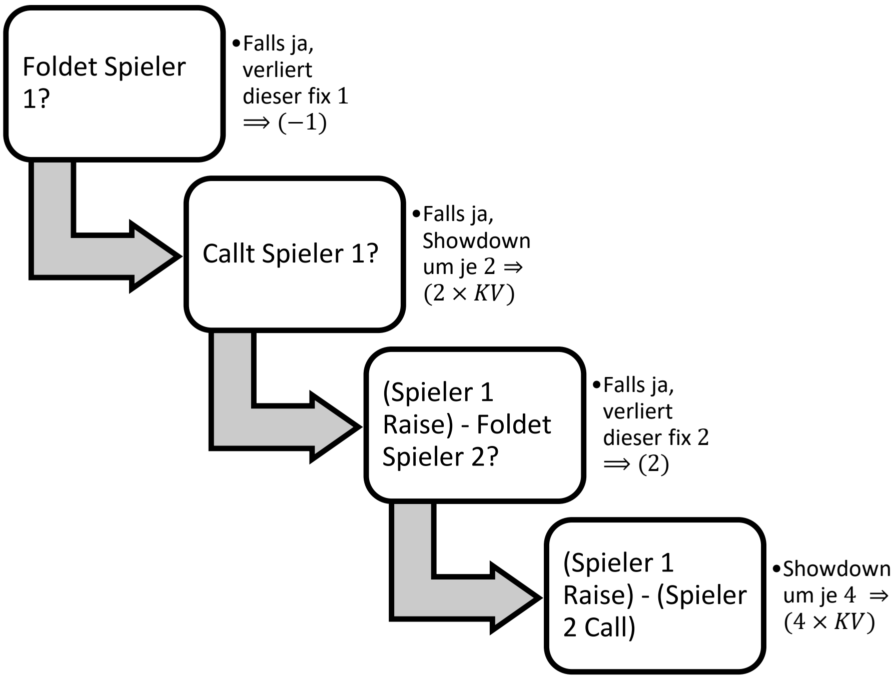


Abbildung 16: Schematische Bedingungen zur Bestimmung des Auszahlungswertes

Dies entspricht in Microsoft Excel der Formel:

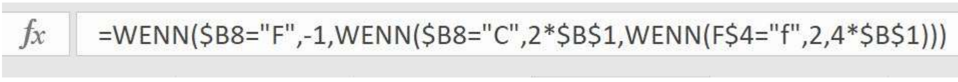


Abbildung 17: Formel zur Bestimmung der des Auszahlungswertes (Screenshot: Microsoft Excel)

Summierung

Um das Spiel in eine gewöhnliche Matrix zu zwingen, können, wie im Beispiel Bewersdorff beschrieben, die verschiedenen Tiefen aufsummiert werden. Da die Kartenverteilungen mit derselben Wahrscheinlichkeit eintreffen, kann diese ohne weiteren Faktor vorgenommen werden. Die Matrix, die neu entsteht, kann als *Major*-Matrix bezeichnet werden. Ihre Auszahlungswerte sind eine Summe aller Auszahlungen, die zwei Handlungsalternativen in allen möglichen Kartenverteilungen generieren.

Reduktion

Als nächstes kann die Normalform reduziert werden, indem alle dominierten reinen Strategien entfernt werden. Dies ist möglich, da ihr Anteil auch in einer gemischten Strategie immer von der dominierenden Strategie übernommen werden kann. Um eine Dominanz zu erkennen, müssen alle Handlungsalternativen mit allen anderen Handlungsalternativen verglichen werden. Eine Handlungsalternative x dominiert eine Handlungsalternative y streng, wenn gilt:

$$U_p\left(s_p^x, S_{-p}\right) > U_p\left(s_p^y, S_{-p}\right) \quad . \forall\, S_{-p} \in \Sigma_{-p}$$

Eine Handlungsalternative x dominiert eine Handlungsalternative y schwach, wenn gilt:

$$U_p\left(s_p^x, S_{-p}\right) \geq U_p\left(s_p^y, S_{-p}\right) \quad . \forall\, S_{-p} \in \Sigma_{-p}$$

Weil eine Strategie bereits bei äquivalenten Auszahlungswerten von der anderen übernommen werden kann, reicht bereits eine schwache Dominanz zur Eliminierung einer Handlungsalternative. Es ist wichtig zu erkennen, dass nach einer ersten Reduktion der Normalform weitere Dominanzen entstehen können. Da durch die Elimination von Handlungsalternativen die Menge Schnittstellen verkleinert wird, kann auf dem neuen Bereich auch eine Strategie dominiert werden, die zuvor nicht dominiert war.

Symmetrisierung

Bei der bisher erstellten Normalform handelt es sich nicht um ein symmetrisches Spiel, der Wert des Spiels ist $\neq 0$. Dies liegt daran, dass das Modell nur eine Spielrunde enthält und deshalb für beide Spieler eine unterschiedliche Situation enthält. Um das Spiel nach dem Lösungsverfahren in Kapitel 2.7 aufzulösen, ist jedoch ein symmetrisches Spiel erforderlich. Zudem soll das Modell, wie das tatsächliche Pokerspiel, einem fairen Spiel entsprechen.

Um dies zu erreichen kann ein Kunstgriff angewendet werden. Das Spielmodell kann zu einem Spiel mit zwei Spielrunden erweitert werden. Eine Handlungsalternative für dieses neue Spiel muss eine Handlung für die Spielsituation Small-Blind und Big-Blind enthalten. Alle Handlungsalternativen vom ursprünglichen Spieler 1, der Small-Blind war, müssen mit allen Handlungsalternativen von Spieler 2, der Big-Blind war, kombiniert werden. Der neue Spieler 1 im symmetrischen Spiel ist derjenige, der als erstes der Small-Blind ist. Handlungsalternativen, die bei der Reduktion eliminiert worden sind, können weiterhin ignoriert werden und müssen nicht in die Normalform des neuen Spiels aufgenommen werden. Die neuen Handlungsalternativen sind Tupel aus den Kombinationen der bisherigen Handlungsalternativen, zum Beispiel (FFF, ff).

Die Symmetrisierung führt zu einer exponentiell vergrösserten Normalform. Da die Matrix zuvor aufgrund der Reduktion nur noch vier Felder enthielt, ist dies nicht problematisch. Zudem vereinfacht sich das Optimierungsproblem zur Suche der optimalen Strategien. Das neu erstellte symmetrische Spiel zieht zur Folge, dass die optimale Strategie für beide Spieler äquivalent sein muss.

Die finale Matrix ist mit einer Erklärung in den Resultaten aufgeführt.

3.3.5 Lösungsverfahren

Nach dem in Kapitel 2.7.3 erörterten Schema kann das Spielmodell als lineare Optimierungsaufgabe gelöst werden. Mit dem Simplex-Verfahren soll der Erwartungswert der beiden Spieler maximiert werden.

Simplex-Algorithmus

Ungleichungssystem für Spieler 1:

$$\begin{aligned}
0 &\leq + 3q_2 - 2q_3 + q_4 \\
0 &\leq -3q_1 + q_3 + 4q_4 \\
0 &\leq +2q_1 - q_2 - 3q_4 \\
0 &\leq -q_1 - 4q_2 + 3q_3
\end{aligned}$$

.$\sum q_i = 1, q_i \geq 0 \; \forall \; i$

Gleichungssystem für Spieler 1 mit Schlupfvariablen $(x_1, \ldots, x_5)$:

$$Z = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$$

$$x_1 = \quad +3q_2 - 2q_3 + q_4$$

$$x_2 = -3q_1 \quad + q_3 + 4q_4$$

$$x_3 = +2q_1 - q_2 \quad - 3q_4$$

$$x_4 = -q_1 - 4q_2 + 3q_3$$

$$x_5 = 1 - q_1 - q_2 - q_3 - q_4$$

$.q_i \geq 0 \; \forall \; i, x_i \geq 0 \; \forall \; i$

Das Gleichungssystem für Spieler 2 ist identisch, da das Spiel symmetrisch ist. Um das System zu optimieren, müssen die Wahrscheinlichkeiten $(q_1, \dots, q_4)$ optimiert werden. Der erste Austauschschritt für q_1 wird exemplarisch durchgeführt.

1. Variable q_1

   Eine Steigerung würde den Zielwert erhöhen.

2. Gleichung, die die Vergrösserung begrenzt:

$$x_2 = -3q_1 \quad + q_3 + 4q_4$$

3. Aufgelöst nach q_1:

$$q_1 = -\frac{1}{3}q_3 - \frac{4}{3}q_4 + \frac{1}{3}x_2$$

4. Rücksubstituiert in das Gleichungssystem:

$$Z = +q_2 + \frac{4}{3}q_3 - \frac{1}{3}q_4 + \frac{1}{3}x_2$$

$$x_1 = +3q_2 - 2q_3 + q_4$$

$$x_2 = +8q_4 - x_2$$

$$x_3 = -q_2 + \frac{2}{3}q_3 - \frac{17}{3}q_4 + \frac{2}{3}x_2$$

$$x_4 = -4q_2 + \frac{8}{3}q_3 + \frac{4}{3}q_4 - x_2$$

$$q_1 = -\frac{1}{3}q_3 - \frac{4}{3}q_4 + \frac{1}{3}x_2$$

Nach diesem Schema müssten alle Lösungs- sowie Schlupfvariablen auf eine Erhöhung des Zielwerts überprüft werden. Ist ein Zielwert von 1 erreicht, ist das Spiel gelöst und die Gleichgewichtsstrategien für beide Spieler sind gefunden.

Statt diesen Rechenaufwand auf mich zu nehmen, habe ich mich entschieden, auf ein Programm zurückzugreifen, das lineare Optimierungsaufgaben lösen kann. Die Internetseite «matopt.de»[63] stellt einen solchen Rechner zur Verfügung. Der genaue Ablauf dieser Berechnung ist im Anhang vorzufinden. In den Resultaten sind der maximierte Zielwert und dessen Wahrscheinlichkeitskoordinaten präsentiert. Die erhaltene Lösung wird überprüft und auf ihre Bedeutung hin analysiert. Schliesslich wird die erhaltene gemischte Strategie m_p^* auf das Enthalten des Bluffs geprüft. Ist ein Bluff in den Strategien enthalten, die zu einem Nash Equilibrium führen, so kann der Beweis als gültig erklärt werden.

[63] Schäfer, «matopt.de»

4 Resultate

4.1 Das Spielmodell

Mit dem, in der Methodik erläuterten Prozess, wurde mein eigenes Spielmodell in die Normalform gebracht, reduziert und symmetrisiert. Diese Arbeitsschritte haben schliesslich zu einer symmetrischen Bimatrix geführt, die in der Abbildung 18 abgebildet ist. Anschliessend soll erklärt werden, wie diese zu verstehen ist.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Symmetrisiert							
2								
3				Spieler 2				
4				Strategie (b,a)	(2,6)	(2,24)	(4,6)	(4,24)
5		Spieler 1	Strategie (a,b)					
6			(6,2)		0	-3	2	-1
7			(24,2)		3	0	-1	-4
8			(6,4)		-2	1	0	3
9			(24,4)		1	4	-3	0

Abbildung 18: Finale Normalform des eigenen Spielmodells (Screenshot: Microsoft Excel)

Die Matrix zeigt die Auszahlungen beim Aufeinandertreffen zweier Handlungsalternativen. Durch die Symmetrisierung des Spiels, also die Erweiterung der Spieldauer auf zwei Runden, müssen die Spieler jeweils vor Beginn des Spiels eine Handlungsalternative für beide Runden wählen. Die Ziffer a in einem Strategien-Tupel ist die gewählte Aktion als Small Blind und die Ziffer b die gewählte Aktion als Big Blind. Da Spieler 1 als erster der Small Blind ist, haben seine Handlungsalternativen die Form (a, b). Spieler 2, der sich zuerst in der Position des Big Blinds befindet, hat Handlungsalternativen mit der Form (b, a).

Für Spielzug a haben sich nach der Elimination der dominierten Strategien die Handlungsalternativen 6 und 24 durchgesetzt.

- Die Alternative 6 bedeutet die Aktion FCR. Sie sieht eine proportionale Handlung zu der erhaltenen Karte vor. Tiefe Karte = Fold, mittlere Karte = Call und hohe Karte = Raise.
- Die Alternative 24 bedeutet die Aktion RCR. Diese enthält das Konzept des Bluffs. Sie sieht bei hoher und mittlerer Karte eine proportionale Handlung vor, bei tiefer Karte erfolgt jedoch ein Raise. Der Spieler gibt trotz tiefer Karte vor, eine hohe Karte zu besitzen.

Für Spielzug b haben sich nach der Elimination der dominierten Strategien die Handlungsalternativen 2 und 4 durchgesetzt.

- Die Alternative 2 bedeutet die Aktion ffc. Sie sieht für die hohe und die tiefe Karte eine proportionale Handlung vor und für die mittlere Karte ein Fold.
- Die Alternative 4 bedeutet die Aktion fcc. Sie sieht für die hohe und die tiefe Karte eine proportionale Handlung vor und für die mittlere Karte ein Call.

In einer Lösung, die die Notwendigkeit des Bluffs beweisen soll, muss die Alternative 24 erhalten sein.

4.2 Lösung

Wie in der Methodik erläutert, habe ich das Spiel mit einem Simplex-Algorithmus gelöst. Das Optimum wurde erreicht beim Punkt:

$$(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2},0)$$

Somit ergeben sich für die gefundene Strategie die Wahrscheinlichkeiten:

$$q_1 = \frac{1}{6}, \qquad q_2 = \frac{1}{3}, \qquad q_3 = \frac{1}{2}, \qquad q_4 = 0$$

Diese Werte ergeben die gemischte Strategie $m_p^* = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die gefundene gemischte Strategie sieht eine Verwendung der Handlungsalternativen (6,2), (24,2) und (6,4) vor. Die Handlungsalternative (6,4) kommt durch eine Gewichtung von $q_4 = 0$ nicht zum Zug.

Zu $q_1 = \frac{1}{6}$ wird die Handlungsalternative (6,2) $\Rightarrow$ (FCR, ffc) gespielt.

Zu $q_2 = \frac{1}{3}$ wird die Handlungsalternative (24,2) $\Rightarrow$ (RCR, ffc) gespielt.

Zu $q_3 = \frac{1}{2}$ wird die Handlungsalternative (6,4) $\Rightarrow$ (FCR, fcc) gespielt.

Das Enthalten der Alternative 24 legt die Notwendigkeit des Bluffs nahe. Allerdings ist mit der gefundenen gemischten Strategie bisher erst gezeigt, dass mit dieser das Optimum erreicht wird. Da auch eine andere Ecke im Simplex das Optimum erreichen könnte, ist die Eindeutigkeit des Resultats noch nicht bestimmt. Bisher ist somit nur bewiesen, dass eine gemischte Strategie, die den Bluff enthält, den Zielwert erreichen kann. Um aber die Notwendigkeit des Bluffs zu zeigen, müssen allfällige weitere gemischte Strategien, die keinen Bluff enthalten und dennoch das Optimum erreichen, ausgeschlossen werden können.

Um dies zu überprüfen, muss noch einmal tiefgehend die Lösung analysiert werden. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeiten isoliert pro Spielzug a und b, so zeigt sich:

Für Spielzug a

- Alternative 6 zu $\frac{2}{3}$, Alternative 24 zu $\frac{1}{3}$

Für Spielzug b

- Alternative 2 zu $\frac{1}{2}$, Alternative 4 zu $\frac{1}{2}$

Diese Trennung macht indes Sinn, da die beiden Spielzüge erst durch die Symmetrisierung in eine gemeinsame Handlungsalternative gezwungen worden sind. Da kein eigentlicher Zusammenhang zwischen diesen Spielzügen besteht, besteht die Annahme, dass jede gemischte Strategie, die ebenfalls die vorliegenden Verhältnisse für Spielzug a und b aufweisen, auch eine optimale Strategie darstellt. Stimmt die Annahme, müsste auch ein Vektor $\vec{V}$, mit unabhängiger Wahl für die Wahrscheinlichkeiten, den Zielwert von 1, unter der Einhaltung aller Nebenbedingungen erreichen.

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 1/2 \cdot 2/3 \\ 1/2 \cdot 1/3 \\ 1/2 \cdot 2/3 \\ 1/2 \cdot 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

Dies trifft zu, womit gesagt werden kann, dass auch der Vektor V eine optimale Strategie darstellt.

$$\vec{V} = m_p^*$$

Um alle Lösungen zu finden, können die isolierten Verhältnisse der Alternativen pro Spielzug als Gleichungen aufgefasst werden.

$$q_1 + q_2 = 1/2 \quad q_3 + q_4 = 1/2$$
$$q_1 + q_3 = 2/3 \quad q_2 + q_4 = 1/3$$

Daraus erfolgt das Gleichungssystem, welches die allgemeine Lösung für das eigene Spielmodell wiedergibt.

$$\text{I} \quad q_1 + q_2 = 1/2$$

$$\text{II} \quad q_1 + q_3 = 2/3$$

$$\text{III} \quad \sum q_i = 1$$

$.q_i \geq 0 \; \forall i$

Mit dem Simplex-Verfahren können nur Optima auf Ecken gefunden werden. Das vorliegende Problem hat hingegen eine ganze Kante als Optimum. Dies kann man sich vorstellen als eine

Reihe, auf der alle Punkte das Optimum erreichen. Der Lösungsraum ist eine Strecke aus unendlich vielen Lösungsvektoren. Die ursprüngliche Lösung muss, da sie mit dem Simplex-Algorithmus gefunden werden konnte, ein Ende dieser Strecke darstellen. Bewegt man sich entlang der Lösungen, die das Gleichungssystem erfüllen, so wird das andere Ende der Strecke erreicht, sobald ein anderer Parameter $\neq q_4$ 0 erreichen wird. Geht man darüber hinweg, so wird eine der Nicht-Negativitäts-Bedingungen verletzt.

Anfang:

$$m_p^*(1) := \vec{A} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ende:

$$m_p^*(x) := \vec{B} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Alle Punkte, die sich auf der Lösungsstrecke befinden und somit eine optimale Strategie darstellen, sind eine Linearkombination $\vec{r_s}$ der Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$.

$$\vec{r_s} = s\vec{A} + (1-s)\vec{B}$$

$.0 \leq s \leq 1$

Alle diese Linearkombinationen $\vec{r_s}$ sind infolgedessen eine optimale Strategie.

$$\vec{r_s} = m_p^*(s)$$

Der so bestimmte Lösungsraum stellt durch die Symmetrie des Spiels die optimale Strategie für beide Spieler dar.

Nash Equilibrium

Da nun der gesamte Lösungsraum der optimalen Strategien für das Spielmodell gefunden ist, kann dieser auf die Bewirkung eines Gleichgewichts geprüft werden. Bereits bei der Problemgrundlage wurde eine Auszahlung von ≤ 0 definiert. Da es sich um ein symmetrisches Spiel handelt, kann kein Spieler eine Auszahlung > 0 erreichen, da beide eine gemischte Strategie aus der Lösungsstrecke von optimalen Strategievektoren wählen müssen. Die langfristige Auszahlung ist somit:

$$U_p(s_p|S_{-p}) = \sum_{i=1}^{|A_p|} q_i \times \mathrm{U}_p(\mathrm{a}_{p,i}|S_{-p}) = 0$$

Weil durch die Spielsymmetrie auch kein höherer Erwartungswert möglich ist, erfüllt die Lösung das Rationalitätsprinzip für beide Spieler.

$$s_p^* = \arg\max U_p(\, s_p|S_{-p}) \checkmark$$

Da das Rationalitätsprinzip für beide Spieler erfüllt ist, wird mit den zulässigen Lösungsstrategien ein Gleichgewicht nach Nash erreicht. Somit ist das Spielmodell gelöst und eine stabile Lösung gefunden.

Überprüfung Bluff

Trotz einer unendlichen Menge an Lösungsstrategien, kann die Notwendigkeit des Bluffs gezeigt werden. Alle Punkte auf der Lösungsstrecke müssen mit einem Anteil von 1/3 die Alternative 24 enthalten. Diese Alternative bedeutet die Aktion RCR, welche einem Bluff entspricht, da sie bei tiefer Karte eine Erhöhung vorsieht. Es gibt keine Strategievektoren, die die Alternative 24 nicht enthalten und dennoch, unter der Einhaltung des Gleichungssystems für die allgemeine Lösung, den optimierten Zielwert erreichen.

Alle Strategien, die keinen Bluff enthalten, können durch den bestimmten Lösungsraum als optimale Strategie ausgeschlossen werden. Nicht-Bluff-Strategien führen im Spielmodell zwingend zu einer verkleinerten Auszahlung und erfüllen somit das Rationalitätsprinzip nicht. Sie können den maximalen Erwartungswert nicht erreichen, weshalb sie auch zu keinem Gleichgewicht führen. Dies beweist die Notwendigkeit, einen Bluff in eine gemischte Strategie zu integrieren, um im Modell den optimalen Auszahlungswert erreichen zu können.

Demnach:

$$M_p^* \subseteq M_p(Bluff) \quad .\mathit{für\ eigenes\ Spielmodell}\ ☑$$

5 Diskussion

In einem letzten Teil sollen die Resultate reflektiert und in einen weiterführenden Kontext gesetzt werden. Die Notwendigkeit des Bluffs konnte anhand eines eigens erstellten Spielmodells bewiesen werden. Rückblickend auf die Zielsetzung der Arbeit, «*Das Ziel dieser Arbeit ist es, fürs Pokerspiel eine Strategie mit maximiertem Erwartungswert zu definieren und zu zeigen, dass diese das Konzept Bluff enthalten muss. Dieser Beweis soll der Spieltheorie entsprechen und anhand eines möglichst realitätsgetreuen Modells durchgeführt werden.*», kann gesagt werden, dass das Ziel erfüllt werden konnte. Die Erstellung des Spielmodells und das Lösungsverfahren repräsentieren den Höhepunkt eines langen und ausgiebigen Arbeitsprozesses. Zu Beginn der Arbeit war die genaue Zielsetzung noch vage und bestand aus der Idee, aus einem mathematischen Blickwinkel Pokerstrategien zu betrachten. Eine erste Vertiefung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigte sich schnell als wenig geeignet, um komplexe Spielgrundlagen zu analysieren. Mit eingehender Recherche fand ich in der Spieltheorie schnell das bessere Werkzeug zur Analyse des Pokerspiels. Die Zielsetzung, die Notwendigkeit des Bluffs zu beweisen, erwies sich als gut gewählt, da damit eine Anwendung der meisten wichtigen Theorien aus der Spieltheorie zum Tragen kam.

Bevor der heutige Wissensstand mit einem Ausblick auf weitere Möglichkeiten erfolgt, soll das Resultat der eigenen Beweisführung diskutiert werden. Es war sinnvoll, das Simplex-Verfahren zur Bestimmung der optimalen Strategie einzusetzen, da sie das gängige System ist, um Spiele zu lösen. Sie ermöglichen auch das Lösen von nicht symmetrischen Spielen, was jedoch viele zusätzliche Schlupfvariablen erfordert und eine Erweiterung der Theorie benötigt. Dies war in dieser Arbeit nicht notwendig, da das Spielmodell sowieso ein faires Spiel darstellen sollte.

Während im Lösungsverfahren mit dem Algorithmus ein Ergebnis gefunden werden konnte, war es sehr wichtig zu erkennen, dass der Lösungsraum eigentlich grösser ist. In der ersten gefundenen Lösungsstrategie war die Gewichtung der vierten Handlungsalternative $q_4 = 0$. Dies lag nicht etwa daran, dass diese Strategie von den anderen dominiert wird, sondern daran, dass der erste gefundene Lösungsvektor nur eine mögliche Lösung darstellte, die die Bedingungen erfüllt. Nach einer differenzierten Suche nach dem ganzen Lösungsraum habe ich die Bedingungen gefunden, die eine allgemeine Lösung erfüllen musste:

Mit einem Verhältnis von $1:2$ muss ein Spieler in der Position des Small-Blinds bei tiefer Karte Bluffen.

Mit einem Verhältnis von 1: 1 muss ein Spieler in der Position des Big-Blinds bei mittlerer Karte mitgehen.

Mit der ersten Bedingung konnte der Beweis trotz einer unendlichen Lösungsmenge als gültig erklärt werden, da alle Lösungsstrategien einen Bluff enthalten müssen. Die zweite Bedingung ist eine Folge mangelnder Aktionen als Big-Blind. Da nur zwei Aktionen zur Verfügung stehen, muss bei mittlerer Karte zur Hälfte mitgegangen und ausgestiegen werden. Somit ist die zweite Bedingung eine rationale Spielweise. Jedoch konnte keine der Handlungsalternativen reduziert werden, da ein Spieler sich nur mit einem Verhältnis von 1: 1 vor Verlusten schützen konnte.

Was bedeutet der Beweis nun eigentlich? Es konnte gezeigt werden, dass im erstellten Spielmodell geblufft werden muss, um den maximalen Auszahlungswert zu erreichen. Spielt man rein rational, so gibt man dem Gegner Informationen, die gegen einen verwendet werden können. Ohne manchmal zu Bluffen wäre es nicht möglich bei tiefer Karte den Blind zu verteidigen. Da alle wichtigen Gegebenheiten eines Heads-Ups im Pokerspiel auch im Spielmodell enthalten sind, ist es naheliegend, dass der Bluff auch in einer optimalen Strategie für das tatsächliche Pokerspiel enthalten sein muss. Die drei Kartenhöhen, die im Spielmodell enthalten sind, könnten - statt der Übersetzung in eine tatsächliche Karte - auch als Gruppierung aufgenommen werden. Die tiefe Karte kann beispielsweise als das schlechtere Drittel der möglichen Handkartenkombinationen verstanden werden. So liesse sich das Resultat aus dem Spielmodell auf das reale Texas Hold'em Poker übersetzen. Eine weitere Erkenntnis aus der Arbeit ist, dass gemäss der Spieltheorie der maximale Erwartungswert gegen einen perfekten Spieler nur mit einer zufälligen Wahl der Handlungsalternativen erreicht werden kann. Zwar müssen diese Handlungsalternativen mit den Wahrscheinlichkeiten entsprechend der optimalen gemischten Strategie gewichtet werden, doch jede Wahl, die bewusst erfolgt, gibt dem perfekten Gegenspieler Informationen über die eigene Spielweise. Jede subjektive Spielweise, wie etwa eine psychologische, unterliegt einem perfekten Spieler. Würden zwei perfekte Spieler gegeneinander antreten, so wäre Poker kurzfristig ein Glücksspiel und würde sich langfristig einem Wert von 0 annähern.

Das wahrhaftige Pokerspiel mit seinen unzähligen Kartenkombinationen konnte bisher auch von Wissenschaftler*innen nicht gelöst werden. Das Bestehen einer optimalen Strategie ist im Rahmen der Spieltheorie definiert, doch bis diese tatsächlich bestimmt werden kann, steht noch ein langer Weg bevor. Die mathematischen Konzepte, die benötigt werden, um ein solch komplexes Spiel zu lösen, sind grösstenteils vorhanden. Vielmehr sind es die technischen Ressourcen, die bisher das Lösen des Pokerspiels verhinderten. Oftmals führt jede aufgelöste Approximation zu einer exponentiellen Vergrösserung der Rechenschritte. Neue Ansätze wie künstliche Intelligenzen könnten in Zukunft neue Möglichkeiten generieren und werden die Spieltheorie mit Sicherheit stark beeinflussen. Will man sich mit den herkömmlichen Methoden dem Pokerspiel annähern, so müssen Schritt für Schritt Verbesserungen vorgenommen werden. Während das Lösen des Pokerspiels sehr interessant wäre, würde es wohl keinen Sinn ergeben, eine grosse Zahl an Ressourcen aufzuwenden, um ein Gesellschaftsspiel zu lösen. Einmal gelöst, würde das Spiel seinen Reiz verlieren. Das Anwendungsgebiet der Spieltheorie wird kontinuierlich grösser und bietet reichlich Möglichkeiten. Wird sie richtig eingesetzt, so könnte mit der Analyse von Entscheidungsproblemen vielerorts geholfen werden. So könnte etwa ein fairer Nahrungsfluss, eine Optimierung von technischen Errungenschaften oder das Lösen von gesellschaftlichen Ungleichheiten angestrebt werden. Die Spieltheorie kann jegliche Prozesse in mathematische Probleme umformen, die sonst nur schwer in eine generalisierte Form zu bringen sind. Ein Spiel ist in der Spieltheorie kein eigentliches Spiel, sondern eine Entscheidungssituation. Auch ein Spieler ist in der Spieltheorie kein Spieler im eigentlichen Sinne, sondern die Verkörperung eines Ziels. So könnte zum Beispiel der Klimawandel als Spiel aufgefasst werden mit einem Spieler, der das Ziel verfolgt, die Auszahlungswerte in Form von Temperaturanstiegen zu vermindern.

Der mathematische und technische Fortschritt ist noch weit von seinem Potential entfernt. Mit neuen Möglichkeiten werden auch in der Spieltheorie neue Türen geöffnet, es ist jedoch wichtig, dass diese Möglichkeiten auch in Zukunft verantwortungsvoll eingesetzt werden.

Auch in meiner Arbeit wurden mir oft Grenzen bewusst, deren Überschreitung den Rahmen einer Maturitätsarbeit sprengen würde. Ein Spielmodell mit Tischkarten beispielsweise wäre im vorgegebenen Zeitraum nicht möglich gewesen. Mit dem Erstellen meiner Maturitätsarbeit konnte ich mir viel Wissen aneignen und mich in einem für mich bisher ziemlich unbekannten Gebiet weiterbilden. Obschon die Arbeit ein langer Prozess war, habe ich die Aufgabe mit grosser Motivation verfolgt. Schlussendlich war es umso erfreulicher, ein fassbares Ergebnis zu erhalten und damit die These bestätigen zu können.

Quellenverzeichnis

Literatur

Alós-Ferrer, C., Ritzberger, K. „Trees and decisions.“ *Journal of Economic Theory 143*, 2008: 216-250.

Barth, Armin P. *Spielend Mathematik lernen.* EducETH. Zürich, 8. Juni 2007.

Bewersdorff, Jörg. *Glück, Logik und Bluff; Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen.* Limburg: Springer Spektrum, 2018.

Deulofeu, Jordi. *Chancen und Strategien.* Kerkdriel: Librero IBP, 2016.

Leininger, Prof. Dr. Wolfgang, und PD Dr. Erwin Amann. *Einführung in die Spieltheorie.* Dortmund, 2008.

Löh, Dr. C. *Diskrete Mathematik – Graphentheorie (Ubersicht).* Regensburg, 2. Februar 2010.

Lück, Stefan, und Claudio Weck. *Eine spieltheoretische Betrachtung des Pokerspiels.* Darmstadt, 8. April 2008.

Müller, Markus. *Poker-Schule Texas Hold'em.* Düsseldorf: DATA BECKER, 2007.

Nash, John. *NON-COOPERATIVE GAMES.* Princeton, Mai 1950.

Parlett, David & McLeod, John. *Pagat; Geschichte des Pokerspiels.* 2005. (Zugriff am 2020. September 10).

pokerstars. *Pokerblätter.* kein Datum. https://www.pokerstars.com/de/poker/games/rules/hand-rankings/ (Zugriff am 26. November 2020).

pokerstrategy. *Probabilities in Texas Hold'em.* kein Datum. https://www.pokerstrategy.com/strategy/various-poker/texas-holdem-probabilities/ (Zugriff am 26. November 2020).

Renato Burkart, René Hugelshofer. *Kombinatorik - mit einer kurzen Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Texas Instruments, 2012.

Resnik, Michael D. „GAME THEORY.“ Kapitel 5 von *Choices - An Introduction to Decision Theory*, von Michael D. Resnik, 121-176. University of Minnesota Press, 1987.

Schäfer, Frederik. *Mathematische Optimierung.* kein Datum. https://www.matopt.de/werkzeuge/lineare-optimierung/simplexalgorithmus.html (Zugriff am 8. Dezember 2020).

Schiendorfer, Emanuel. „chesspoint.“ *Die Geschichte des Schachspiels.* 9. Juli 2018. https://www.chesspoint.ch/blog/geschichte/die-geschichte-des-schachspiels (Zugriff am 8. September 2020).

Sherwood, Kelvin. „realpoker." *How many poker players in the world?* 3. September 2019. https://realpoker.in/articles/how-many-poker-players-in-the-world-23955/#:~:text=The%20statistics%20are%20staggering%20and,and%20over%20100%20million%20worldwide. (Zugriff am 10. August 2020).

Weisstein, Eric. *Combination.* 22. September 2020. https://mathworld.wolfram.com/Combination.html (Zugriff am 1. Oktober 2020).

—. *Simplex.* 23. Oktober 2020. https://mathworld.wolfram.com/Simplex.html (Zugriff am 9. November 2020).

Wikipedia. *Backgammon.* 3. September 2020. https://de.wikipedia.org/wiki/Backgammon#Geschichte (Zugriff am 8. September 2020).

—. *Simplex (Mathematik).* 3. November 2020. https://de.wikipedia.org/wiki/Simplex_(Mathematik) (Zugriff am 9. November 2020).

Abbildungen und Tabellen

Titelseite: Erstellt auf Adobe Spark. (Hintergrund: Ausschnitte einer Excel Tabelle aus dem praktischen Teil)

Lauftext

Anhang

Anhang

I. Wahrscheinlichkeiten im Pokerspiel

Dieses Kapitel präsentiert den Prozess und die Resultate aus dem ursprünglichen Projekt, bevor der Fokus der Arbeit neu gesetzt wurde. Wie in der Methode erläutert, hatte ich mich mit den Blattwahrscheinlichkeiten befasst. Dieses Kapitel hat keinen Einfluss auf die These und kann allenfalls übersprungen werden.

Prozess

Wie bereits in der Theorie erkannt, spielt der Zufall eine zentrale Rolle beim Pokern. Ich stellte mir deshalb die Frage: *„Welche Vorgänge sind überhaupt durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung geprägt?“*

Diese Frage liess sich ziemlich einfach beantworten; beim Verteilen der Karten. Sowohl die Handkarten als auch die offenen Karten in der Mitte werden rein zufällig ausgeteilt. Der Spieler kann keinen Einfluss darauf nehmen und muss deshalb Kombinatorik in sein Spiel miteinbeziehen.

Anfangs habe ich mit einigen grundlegenden Berechnungen gestartet, um eine Übersicht zu verschaffen:

$$\#\text{mögliche Handkartenkombinationen} = 52 \cdot 51 = 2'652$$

$$\#\text{ mögliche Tischkartenkombinationen} = \binom{52}{5} = 2'598'960$$

$$\#\text{ Hk und Tk kombiniert} = \binom{52}{7} = 133'784'560$$

Um weiterführend mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung Schlüsse auf eine optimale Strategie zu ziehen, setzte ich mir anfangs das Ziel, die Blattwahrscheinlichkeiten zu berechnen. Diese kombinatorischen Berechnungen führte ich auf Microsoft Excel durch.

- Gesucht sind die *Wahrscheinlichkeiten P* auf ein bestimmtes *Blatt B*.

Um diese *Blattwahrscheinlichkeiten $P(B)$* zu finden, müssen alle möglichen Kombinationen eines bestimmten Blattes durch alle möglichen Kartenkombinationen geteilt werden. Wiederholung kann ausgeschlossen werden, da die Karten im Deck nur einmal vorkommen. Auch die Reihenfolge, in welcher die Karten gezogen werden, spielt keine Rolle. Deshalb sind Binomialkoeffizienten zielführend. In einem ersten Schritt habe ich mich den Blattwahrscheinlichkeiten aus fünf Karten gewidmet. So kann die Schwierigkeit umgangen werden, dass in einem Blatt regelgemäss nur die fünf besten der sieben Karten gezählt werden.

- **5 Karten**
- $P(B) = \frac{Kombinationen_B}{\binom{52}{5}}$

	Kombinationen
Royal Flush	$1 \times 4 = \mathbf{4}$
Straight Flush	$4 \times 10 = \mathbf{40}$
Four of a Kind	$13 \times 48 = \mathbf{624}$
Full House	$13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2} = \mathbf{3744}$
Flush	$4 \times \binom{13}{5} = \mathbf{5148}$
Straight	$10 \times 4^5 = \mathbf{10240}$
Three of a Kind	$13 \times \binom{4}{3} \times \binom{49}{47} = \mathbf{61152}$
Two Pair	$13 \times \binom{4}{2} \times 12 \times \binom{4}{2} \times 48 = \mathbf{269568}$
One Pair	$13 \times \binom{4}{2} \times \binom{50}{3} = \mathbf{1528800}$

Tabelle I: Blattkombinationen aus fünf Karten

In der ersten Tabelle wird jedes Blatt isoliert betrachtet. In der Realität müssen die Kombinationen bereinigt werden. Zwar gibt es tatsächlich 61152 verschiedene Drillinge mit 5 aus 52 Karten, doch 3744 dieser Variationen sind zudem ein Full House. Beinhaltet ein Blatt ein zweites besseres Blatt, so muss es den Kombinationen für das schlechtere Blatt abgezogen werden. Die Tabelle II zeigt alle bereinigten Kombinationen an.

Beispiel Abzüge: Three of a Kind $\Longrightarrow 61152 - 3744 = 56784$

Kombinationen bereinigt

Royal Flush	**4**
Straight Flush	**36**
Four of a Kind	**624**
Full House	**3744**
Flush	**5108**
Straight	**10200**
Three of a Kind	**56784**
Two Pair	**265824**
One Pair	**1201824**

Tabelle II: Bereinigte Blattkombinationen aus fünf Karten

Mit diesen Kombinationen habe ich schliesslich die Blattwahrscheinlichkeiten ausgewertet. Zudem erweiterte ich die Liste um das Blatt High Card. Diese stellt das Gegenereignis $\bar{B}$ dar, da dies eintrifft, wenn man nichts Besseres hat.

Das nächste Ziel war es, gemäss den Spielregeln die Wahrscheinlichkeiten auf ein Blatt mit fünf aus sieben Karten zu berechnen.

- **7 Karten**
- $P(B) = \frac{Kombinationen_B}{\binom{52}{7}}$

Der Versuch, das eben erörterte Konzept auf ein Blatt aus sieben Karten zu übertragen, erwies sich schnell als nicht zielführend. Das Problem; es muss eine ganze Liste zusätzlicher Abzüge berücksichtigt werden. Die zwei Zusatzkarten erschaffen einerseits neue Kombinationen und führen andererseits dazu, dass viele Kombinationen mehrfach gezählt sind. Dadurch entstehen komplexe Systeme von Abzügen, die zunehmend weniger überblickbar sind.

Die Problematik soll am Beispiel der Straight gezeigt werden, die von oben nach unten die erste Zeile war, die ich nicht mehr korrekt lösen konnte. Bisher konnten einfach die hierarchisch besseren Blätter abgezogen werden, doch nun müssen zusätzlich Blätter abgezogen werden, die erst mit den Zusatzkarten generiert wurden. Als Beispiel dafür soll die «Lange Strasse» in Abbildung I dienen; eine gewöhnliche Straight wird ergänzt durch eine anliegende Karte und bildet so eine weitere Straight. Es liegen nun zwei Straights vor, [2; 6] und [3; 7]. Da aber nur eine Straight gezählt wedern kann, muss die zweite wieder von den Kombinationen abgezogen werden.

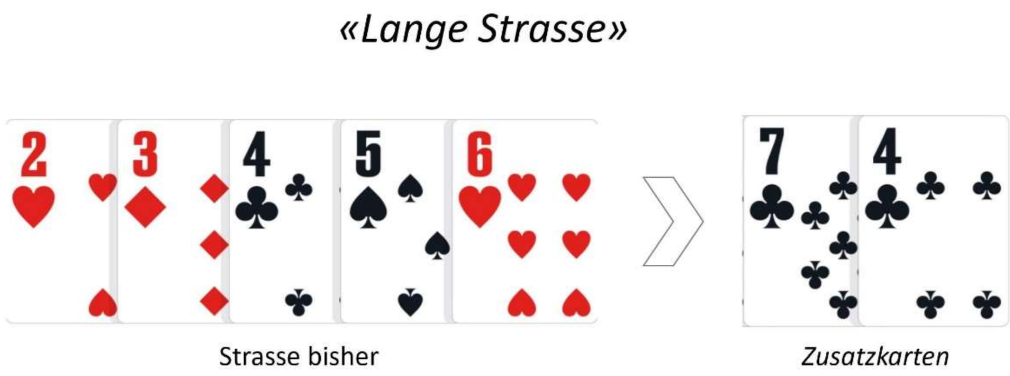


Abbildung I: Situation «Lange Strasse» (erstellt mit Icons aus www.pokerstars.com)

Den Fall Lange Strasse mit 6 beziehungsweise 7 Karten konnte ich bereits mit einer geschickten Formel für die Kombinationen umgehen.

$$\text{Kombinationen Straight} = 9 \times 4^5 \times \binom{43}{2} + 4^5 \binom{47}{2} = \mathbf{9428992}$$

Die weiteren Abzüge gestalten sich komplexer. Gegen unten vermehren sich die Abzüge stark, wobei alle Fälle spezifisch identifiziert und ausgewertet werden müssen. Um beispielsweise die Straights von einem Pair abzuziehen, muss sowohl die Möglichkeit berechnet werden, dass sich eine Paarkarte innerhalb und ausserhalb einer Straight befinden kann. Während solche Berechnungen bereits zu einem unübersichtlichen System führen, kommt eine zusätzliche Schwierigkeit hinzu. Es müssen Abzüge von den Abzügen gemacht werden. Nicht wie zuvor können zum Beispiel von einem Pair isoliert die Straight- und Flush-Kombinationen abgezogen werden. In 7 Karten können die Straight und der Flush auch getrennt auftreten und nicht nur in der Form eines Straight Flush. Zieht man somit alle Straight- und Flush-Kombinationen, die auch ein Paar enthalten, von den Paaren ab, so ist der Abzug zu gross. Alle Kombinationen, die gleichzeitig einen Flush und eine Straight enthalten, müssen vom Abzug wieder abgezogen werden.

Abzüge in diesem Stil fallen für alle Blätter an und müssen in jedem Fall individuell gesucht werden. So entsteht ein grosser Aufwand, den ich anfangs bestritten habe, jedoch abbrach, bevor ich alle Blätter korrekt berechnet hatte. Dies war eine Folge des bereits angepassten Fokus der Maturarbeit.

Im nächsten Unterkapitel ist der finale Stand dieser Berechnung einzusehen. Um zu zeigen, welche Werte korrekt sind, habe ich meine Lösungen mit der Internetseite «pokerstrategy.com»[64] verglichen, auf der die Werte zur Verfügung gestellt sind. Dabei habe ich meine Werte entsprechend der Richtigkeit eingefärbt, wie es in den Resultaten noch erläutert wird.

In einem letzten Schritt habe ich die Alternativen zu dieser aufwändigen Rechnung gesucht, obschon sie für diese Arbeit nicht mehr relevant sind, auch dies ist gezeigt.

Resultate

- Blattwahrscheinlichkeiten aus 5 Karten

In der Tabelle III sind die Blattwahrscheinlichkeiten gemäss den berechneten Kombinationen ausgewertet.

Wahrscheinlichkeiten in % *

Royal Flush	0.000
Straight Flush	0.001
Four of a Kind	0.024
Full House	0.144
Flush	0.197
Straight	0.392
Three of a Kind	2.185
Two Pair	10.228
One Pair	46.242
High Card	$\bar{B} = 1 - B = \mathbf{40.586}$

Tabelle III: Blattwahrscheinlichkeiten aus fünf Karten

*gerundet auf 3 Dezimalstellen

- Blattwahrscheinlichkeiten aus 7 Karten

Die Tabelle IV zeigt den finalen Stand der Blattwahrscheinlichkeiten mit fünf aus sieben Karten, bevor die neue These im Bereich der Spieltheorie folgte. Die Einfärbung zeigt die Abweichung vom korrekten Wert der Internetseite «pokerstrategy.com»[65].

---

[64] pokerstrategy.com, *Probabilities in Texas Hold'em*
[65] pokerstrategy.com, *Probabilities in Texas Hold'em*

Wahrscheinlichkeiten in % *	
Royal Flush	**0.003**
Straight Flush	**0.028**
Four of a Kind	**0.168**
Full House	**2.596**
Flush	**3.025**
Straight	**6.839**
Three of a Kind	**4.876**
Two Pair	**54.867**
One Pair	**52.197**
High Card	$\bar{B} = 1 - B = \textit{nicht möglich}$

Tabelle IV: Blattwahrscheinlichkeiten mit fünf aus sieben Karten

= korrekt

= nicht korrekt, Abweichung ≤ 2 %

= nicht korrekt, Abweichung > 2 %

*gerundet auf 3 Dezimalstellen

- Alternativen

Da die Berechnung der Blätter gegen unten immer komplexer wird, habe ich die Hände nur bis zur Straight ausgewertet. Ansonsten würde bereits für die Berechnung der Blätterwahrscheinlichkeiten ein enormer Rechenaufwand entstehen und den Umfang einer Maturarbeit übertreffen. Dies wird bereits anhand des Beispiels Straight ersichtlich. Um diesen Rechenaufwand zu umgehen, könnte alternativ die Simulation der Blätter zielführend sein. Jedoch müsste ein Programm über 674 Milliarden Kombinationen aufführen und diese wiederum nach dem besten enthaltenen Blatt auszählen. Schliesslich müssten die Blätter gruppiert und ins Verhältnis mit allen Kombinationen gesetzt werden.

II. Eigenes Spielmodell

Das Spielmodell habe ich auf Microsoft Excel erstellt. Alle folgenden Abbildungen sind Screenshots aus meiner Excel Arbeitsmappe.

Normalform

Zunächst mussten alle Handlungsalternativen aufgeführt werden.

Spieler 1:

27 Handlungsalternativen

	T	M	H
1	F	F	F
2	F	F	C
3	F	F	R
4	F	C	F

...

Spieler 2:

8 Handlungsalternativen

	1	2	3	4
T	f	f	f	f
M	f	f	c	c
H	f	c	f	c

...

Für die Erstellung der Normalform benötigte ich drei Dimensionen. Da Excel, mit seinen typischen Tabellen, eigentlich nur zwei Dimensionen erlaubt, muss eine Ergänzung vorgenommen werden. Die nötige Tiefe und somit Dreidimensionalität kann durch zusätzliche Tabellenblätter erreicht werden. Ich habe demnach für jede mögliche Kartenverteilung eine eigene Matrix erstellt. Es entstanden neun Tabellenblätter, wobei der erste Buchstabe für Spieler 1 und der zweite Buchstabe für Spieler 2 steht.

TT	TM	TH	MT	MM	MH	HT	HM	HH

Die einzelnen Auszahlungswerte auf den Tabellenblättern sollen wie üblich in der Spieltheorie auf Spieler 1 ausgerichtet sein. Alle negativen Auszahlungswerte entsprechen demnach einem Verlust von Spieler 1 an Spieler 2. Die einzelnen Auszahlungswerte in der Matrix habe ich durch eine Verkettung von Bedingungen erreicht. Dies ist nötig, um die Fallunterscheidung zu berücksichtigen. Sie sind generiert mit der Formel:

```
fx  =WENN($B8="F",-1,WENN($B8="C",2*$B$1,WENN(F$4="f",2,4*$B$1)))
```

Nun folgen die neun Tabellenblätter, die jeweils eine Kartenverteilung beinhalten. Auf jeder diesen Matrizen ist farblich gekennzeichnet, welche Karten vorhanden sind. Im Feld $B2$ ist jeweils der Faktor angegeben, welcher die zwei vorgegeben Karten im Falle eines Showdowns bewirken. Findet ein Showdown statt, so wird der Einsatz mit dem Wert in Feld $B2$ multipliziert. Die folgenden Abbildungen zeigen beispielhaft drei der neun Tabellenblätter.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	TT	0											
2													
3						1	2	3	4	5	6	7	8
4					T	f	f	f	f	c	c	c	c
5					M	f	f	c	c	f	f	c	c
6					H	f	c	f	c	f	c	f	c
7		T	M	H									
8	1	F	F	F		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	2	F	F	C		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
10	3	F	F	R		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
11	4	F	C	F		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
12	5	F	C	C		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
13	6	F	C	R		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
14	7	F	R	F		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
15	8	F	R	C		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
16	9	F	R	R		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
17	10	C	F	F		0	0	0	0	0	0	0	0
18	11	C	F	C		0	0	0	0	0	0	0	0
19	12	C	F	R		0	0	0	0	0	0	0	0
20	13	C	C	F		0	0	0	0	0	0	0	0
21	14	C	C	C		0	0	0	0	0	0	0	0
22	15	C	C	R		0	0	0	0	0	0	0	0
23	16	C	R	F		0	0	0	0	0	0	0	0
24	17	C	R	C		0	0	0	0	0	0	0	0
25	18	C	R	R		0	0	0	0	0	0	0	0
26	19	R	F	F		2	2	2	2	0	0	0	0
27	20	R	F	C		2	2	2	2	0	0	0	0
28	21	R	F	R		2	2	2	2	0	0	0	0
29	22	R	C	F		2	2	2	2	0	0	0	0
30	23	R	C	C		2	2	2	2	0	0	0	0
31	24	R	C	R		2	2	2	2	0	0	0	0
32	25	R	R	F		2	2	2	2	0	0	0	0
33	26	R	R	C		2	2	2	2	0	0	0	0
34	27	R	R	R		2	2	2	2	0	0	0	0
35													

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	MT	1											
2													
3						1	2	3	4	5	6	7	8
4					T	f	f	f	f	c	c	c	c
5					M	f	f	c	c	f	f	c	c
6					H	f	c	f	c	f	c	f	c
7		T	M	H									
8	1	F	F	F		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	2	F	F	C		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
10	3	F	F	R		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
11	4	F	C	F		2	2	2	2	2	2	2	2
12	5	F	C	C		2	2	2	2	2	2	2	2
13	6	F	C	R		2	2	2	2	2	2	2	2
14	7	F	R	F		2	2	2	2	4	4	4	4
15	8	F	R	C		2	2	2	2	4	4	4	4
16	9	F	R	R		2	2	2	2	4	4	4	4
17	10	C	F	F		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
18	11	C	F	C		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
19	12	C	F	R		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
20	13	C	C	F		2	2	2	2	2	2	2	2
21	14	C	C	C		2	2	2	2	2	2	2	2
22	15	C	C	R		2	2	2	2	2	2	2	2
23	16	C	R	F		2	2	2	2	4	4	4	4
24	17	C	R	C		2	2	2	2	4	4	4	4
25	18	C	R	R		2	2	2	2	4	4	4	4
26	19	R	F	F		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
27	20	R	F	C		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
28	21	R	F	R		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
29	22	R	C	F		2	2	2	2	2	2	2	2
30	23	R	C	C		2	2	2	2	2	2	2	2
31	24	R	C	R		2	2	2	2	2	2	2	2
32	25	R	R	F		2	2	2	2	4	4	4	4
33	26	R	R	C		2	2	2	2	4	4	4	4
34	27	R	R	R		2	2	2	2	4	4	4	4
35													

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	TH	-1											
2													
3						1	2	3	4	5	6	7	8
4					T	f	f	f	f	c	c	c	c
5					M	f	f	c	c	f	f	c	c
6					H	f	c	f	c	f	c	f	c
7		T	M	H									
8	1	F	F	F		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	2	F	F	C		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
10	3	F	F	R		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
11	4	F	C	F		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
12	5	F	C	C		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
13	6	F	C	R		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
14	7	F	R	F		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
15	8	F	R	C		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
16	9	F	R	R		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
17	10	C	F	F		-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
18	11	C	F	C		-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
19	12	C	F	R		-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
20	13	C	C	F		-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
21	14	C	C	C		-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
22	15	C	C	R		-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
23	16	C	R	F		-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
24	17	C	R	C		-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
25	18	C	R	R		-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
26	19	R	F	F		2	-4	2	-4	2	-4	2	-4
27	20	R	F	C		2	-4	2	-4	2	-4	2	-4
28	21	R	F	R		2	-4	2	-4	2	-4	2	-4
29	22	R	C	F		2	-4	2	-4	2	-4	2	-4
30	23	R	C	C		2	-4	2	-4	2	-4	2	-4
31	24	R	C	R		2	-4	2	-4	2	-4	2	-4
32	25	R	R	F		2	-4	2	-4	2	-4	2	-4
33	26	R	R	C		2	-4	2	-4	2	-4	2	-4
34	27	R	R	R		2	-4	2	-4	2	-4	2	-4
35													

Summierung

Um eine gewöhnliche Bimatrix zu erreichen, habe ich die verschiedenen Tabellenblätter aufsummiert. Es ist eine Tiefenaddition notwendig, diese sieht auf Excel beispielsweise so aus:

```
fx  =SUMME(TT:HH!F8)
```

So habe ich die Major-Matrix erstellt:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Major												
2													
3						1	2	3	4	5	6	7	8
4					T	f	f	f	f	c	c	c	c
5					M	f	f	c	c	f	f	c	c
6					H	f	c	f	c	f	c	f	c
7		T	M	H									
8	1	F	F	F		-9	-9	-9	-9	-9	-9	-9	-9
9	2	F	F	C		-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
10	3	F	F	R		0	-2	2	0	2	0	4	2
11	4	F	C	F		-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
12	5	F	C	C		1	1	1	1	1	1	1	1
13	6	F	C	R		3	1	5	3	5	3	7	5
14	7	F	R	F		0	-6	-2	-8	2	-4	0	-6
15	8	F	R	C		7	1	5	-1	9	3	7	1
16	9	F	R	R		9	1	9	1	13	5	13	5
17	10	C	F	F		-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10
18	11	C	F	C		-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
19	12	C	F	R		-1	-3	1	-1	1	-1	3	1
20	13	C	C	F		-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7
21	14	C	C	C		0	0	0	0	0	0	0	0
22	15	C	C	R		2	0	4	2	4	2	6	4
23	16	C	R	F		-1	-7	-3	-9	1	-5	-1	-7
24	17	C	R	C		6	0	4	-2	8	2	6	0
25	18	C	R	R		8	0	8	0	12	4	12	4
26	19	R	F	F		0	-6	-6	-12	-2	-8	-8	-14
27	20	R	F	C		7	1	1	-5	5	-1	-1	-7
28	21	R	F	R		9	1	5	-3	9	1	5	-3
29	22	R	C	F		3	-3	-3	-9	1	-5	-5	-11
30	23	R	C	C		10	4	4	-2	8	2	2	-4
31	24	R	C	R		12	4	8	0	12	4	8	0
32	25	R	R	F		9	-3	1	-11	9	-3	1	-11
33	26	R	R	C		16	4	8	-4	16	4	8	-4
34	27	R	R	R		18	4	12	-2	20	6	14	0

Reduktion

Um die dominierten Strategien zu eliminieren, müssen für Spieler 1 die Auszahlungswerte in den Zeilen verglichen werden und für Spieler 2 in den Spalten. Eine Strategie dominiert eine andere, wenn alle Auszahlungswerte mindestens so gut sind wie in einer anderen Spalte bzw. Zeile, aber besser in mindestens einer Auszahlung. Alle Spalte bzw. Zeile müssen mit allen anderen verglichen werden. Um in der Formel zu umgehen, dass eine Strategie als von sich selbst dominiert erkannt wird, habe ich die $\geq$ Beziehung in der Formel zu einem $>$ verstärkt. Dies ist zulässig, da dieser Zusatz die Bedingung strenger macht und nicht auflockert. Ich habe jeweils jede einzelne Strategie gegen jede andere Strategie geprüft und musste die Tabelle um 8×8 bzw. 27×27 Felder erweitern. Um nicht alle Formeln einzeln anzupassen, habe ich mit der Funktion *BEREICH.VERSCHIEBEN* gearbeitet. Die Formel, die eine Strategie auf Dominanzen prüfte, lautet:

```
fx  =UND($F8:$M8<=BEREICH.VERSCHIEBEN($F$7,P$7,0,1,8),NICHT(UND($F8:$M8=BEREICH.VERSCHIEBEN($F$7,P$7,0,1,8))))
```

So entsteht eine Liste von «WAHR» und «FALSCH». Jedes «WAHR» steht für die Domination durch die Strategie mit der angegebenen Nummer. Gezeigt sind beispielhaft zwei solche Spalten, die für die Strategien 1 und 2 von Spieler 2 stehen.

1	FALSCH	FALSCH	
2	WAHR	FALSCH	
3	FALSCH	FALSCH	
4	WAHR	FALSCH	...
5	FALSCH	FALSCH	
6	WAHR	FALSCH	
7	FALSCH	FALSCH	
8	FALSCH	FALSCH	

Da bereits die Domination durch eine andere Reihe reicht, um eine reine Strategie zu eliminieren, konnte ich bereits ein «WAHR» als «die Strategie kann ignoriert werden» betrachten. Mit der *ODER* Funktion von Excel kann ein Bereich darauf geprüft werden, ob ein «WAHR» vorhanden ist.

```
fx  =ODER(F37:F44)
```

Bereits bei mindestens einem «WAHR» wiedergibt die Funktion ebenfalls ein «WAHR». So entsteht ein Gesamtresultat pro Handlungsalternative, welches im Falle «WAHR» zeigt, dass die Strategie dominiert wird.

Spalte wird streng domiert durch Spalte		
	WAHR	FALSCH
1	FALSCH	FALSCH
2	WAHR	FALSCH
3	FALSCH	FALSCH
4	WAHR	FALSCH
5	FALSCH	FALSCH
6	WAHR	FALSCH
7	FALSCH	FALSCH
8	FALSCH	FALSCH

…

Schliesslich habe ich alle Strategien, die nicht dominiert waren, in einer reduzierten Normalform zusammengefügt. Die verbleibenden Auszahlungswerte habe ich mit der *INDEX* Funktion aus dem Major Tabellenblatt übernommen:

`fx =INDEX(Major!$F$8:$M$34,$A26,F$3)`

Erste reduzierte Normalform:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Reduziert 1							
2								
3						2	4	8
4					T	f	f	c
5					M	f	c	c
6					H	c	c	c
7		T	M	H				
8	6	F	C	R		1	3	5
9	9	F	R	R		1	1	5
10	24	R	C	R		4	0	0
11	27	R	R	R		4	-2	0
12								

Unter den reduzierten Strategien bin ich erneut auf dominierte Strategien gestossen. Dies liegt daran, dass viele Auszahlungswerte bereits eliminiert wurden und eine Strategie in den wenigen verbleibenden Werten wieder dominiert werden kann. Deshalb habe ich die neue vereinfachte Form erneut überprüft und reduziert.

Zweite reduzierte Normalform:

20							
21	Reduziert 2					2	4
22					T	f	f
23					M	f	c
24					H	c	c
25		T	M	H			
26	6	F	C	R		1	3
27	24	R	C	R		4	0
28							

Symmetrisierung

Kombiniert man die Handlungsalternativen von Spieler 1 mit denen von Spieler 2, ergeben sich Strategien-Tupel. So kann ein symmetrisches Spiel erstellt werden mit denselben Handlungsalternativen für beide Spieler.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Symmetrisiert							
2								
3				Spieler 2				
4				Strategie (b,a)	(2,6)	(2,24)	(4,6)	(4,24)
5		Spieler 1	Strategie (a,b)					
6			(6,2)		0	-3	2	-1
7			(24,2)		3	0	-1	-4
8			(6,4)		-2	1	0	3
9			(24,4)		1	4	-3	0

III. Lösungsverfahren

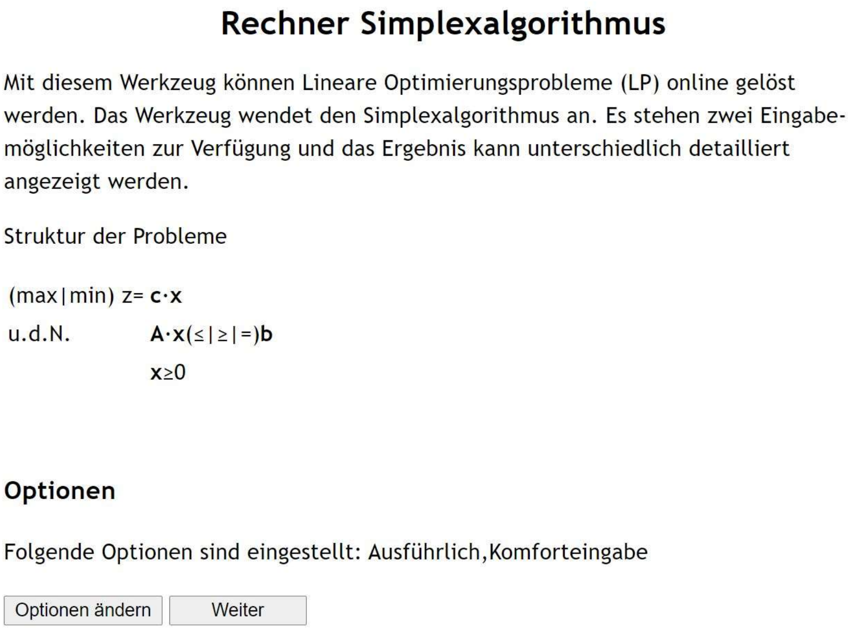
Das gefundene Ungleichungssystem kann als lineare Optimierungsaufgabe gelöst werden.

$$
\begin{aligned}
0 &\leq + 3q_2 - 2q_3 + q_4 \\
0 &\leq -3q_1 + q_3 + 4q_4 \\
0 &\leq +2q_1 - q_2 - 3q_4 \\
0 &\leq -q_1 - 4q_2 + 3q_3
\end{aligned}
$$

.$\sum q_i = 1, q_i \geq 0 \; \forall \; i$

Wie bereits in den Resultaten angesprochen, habe ich diese Aufgabe mit dem Programm «Rechner Simplexalgorithmus» von Frederik Schäfer durchgeführt. Die Website ist als Quelle im Verzeichnis eingetragen. Das Programm zeigt die verschiedenen Rechenschritte bis zur Lösung. Durch diesen Prozess wird nun anhand von Screenshots der Website geführt. Alle folgenden Abbildungen sind demnach von der verzeichneten Website.

Als erstes habe ich mit dem Simplexalgorithmus das passende Werkzeug für das Optimierungsproblem ausgewählt. Auf der Website standen weitere Werkzeuge wie etwa die Matrixmultiplikation zur Verfügung.



Rechner Simplexalgorithmus

Mit diesem Werkzeug können Lineare Optimierungsprobleme (LP) online gelöst werden. Das Werkzeug wendet den Simplexalgorithmus an. Es stehen zwei Eingabemöglichkeiten zur Verfügung und das Ergebnis kann unterschiedlich detailliert angezeigt werden.

Struktur der Probleme

(max|min) z= **c**·**x**
u.d.N. **A**·**x**(≤|≥|=)**b**
x≥0

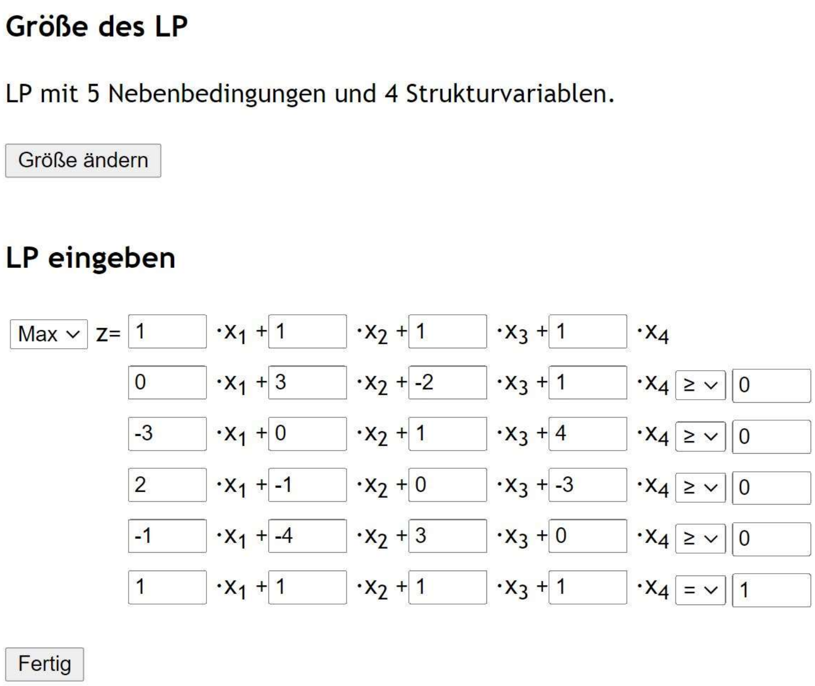
Optionen

Folgende Optionen sind eingestellt: Ausführlich,Komforteingabe

Optionen ändern Weiter

Da das Programm nur die Variablen x_i zulässt, musste ich meine Wahrscheinlichkeiten q_i provisorisch durch x_i ersetzen.

Zudem war nur die Maximierung oder Minimierung des Zielwerts möglich, wie es in der linearen Optimierung üblich ist. Im vorliegenden Problem ist der Zielwert bereits bekannt und stattdessen sind die Variablen im Optimum gesucht. Um dennoch eine Lösung zu erreichen, habe ich den bereits bekannten Zielwert von 1 als Nebenbedingung eingesetzt und im Auswahlfeld für den Zielwert «Maximieren» ausgewählt.



Größe des LP

LP mit 5 Nebenbedingungen und 4 Strukturvariablen.

Größe ändern

LP eingeben

Max z= 1 ·x_1 + 1 ·x_2 + 1 ·x_3 + 1 ·x_4

0 ·x_1 + 3 ·x_2 + -2 ·x_3 + 1 ·x_4 ≥ 0

-3 ·x_1 + 0 ·x_2 + 1 ·x_3 + 4 ·x_4 ≥ 0

2 ·x_1 + -1 ·x_2 + 0 ·x_3 + -3 ·x_4 ≥ 0

-1 ·x_1 + -4 ·x_2 + 3 ·x_3 + 0 ·x_4 ≥ 0

1 ·x_1 + 1 ·x_2 + 1 ·x_3 + 1 ·x_4 = 1

Fertig

Schlupfvariablen waren nicht notwendig und sind mit dem Programm nicht lösbar. Dies liegt daran, dass das Programm selbst Schlupfvariablen einführt. Der Rechner generiert einen Simplex-Tableaus für das Problem. Die folgenden Abbildungen zeigen die Rechenschritte, die das Programm ausführt und auch gleich erklärt.

Ausführliches Ergebnis

Tableau 1

	x1	x2	x3	x4	x5k	x6k	x7k	x8k	x9k	xü5	xü6	xü7	xü8		
z2	1	1	-3	-3	0	0	0	0	0	1	1	1	1	-1	
z	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	3	-2	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-
	-3	0	1	4	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0/1=0
	2	-1	0	-3	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	-
	-1	-4	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0/3=0
	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1/1=1

Das Problem wurde in das Tableau eingetragen und die Normalform hergestellt. Dabei war das Anlegen von künstlichen Variablen erforderlich. Zunächst müssen diese in der 1. Phase eliminiert werden.

Tableau 2

	x1	x2	x3	x4	x5k	x7k	x8k	x9k	xü5	xü6	xü7	xü8		
z2	-8	1	0	9	0	0	0	0	1	-2	1	1	-1	
z	-4	-1	0	3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	
	-6	3	0	9	1	0	0	0	-1	-2	0	0	0	-
	-3	0	1	4	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-
	2	-1	0	-3	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0/2=0
	8	-4	0	-12	0	0	1	0	0	3	0	-1	0	0/8=0
	4	1	0	-3	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1/4=0,25

Die Variable x6k war eine künstliche Variable und hat die Basis verlassen, sie wurde gestrichen.

Tableau 3

	x1	x2	x3	x4	x5k	x8k	x9k	xü5	xü6	xü7	xü8		
z2	0	-3	0	-3	0	0	0	1	-2	-3	1	-1	
z	0	-3	0	-3	0	0	0	0	-1	-2	0	0	
	0	0	0	0	1	0	0	-1	-2	-3	0	0	-
	0	-1,5	1	-0,5	0	0	0	0	-1	-1,5	0	0	-
	1	-0,5	0	-1,5	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	-
	0	0	0	0	0	1	0	0	3	4	-1	0	-
	0	3	0	3	0	0	1	0	1	2	0	1	1/3=0,3333

Die Variable x7k war eine künstliche Variable und hat die Basis verlassen, sie wurde gestrichen.

Tableau 4

	x1	x2	x3	x4	x5k	x8k	xü5	xü6	xü7	xü8		
z2	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	0	
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	0	0	0	0	1	0	-1	-2	-3	0	0	-
	0	0	1	1	0	0	0	-0,5	-0,5	0	0,5	-
	1	0	0	-1	0	0	0	0,1667	-0,1667	0	0,1667	0,1667/0,1667=1
	0	0	0	0	0	1	0	3	4	-1	0	0/3=0
	0	1	0	1	0	0	0	0,3333	0,6667	0	0,3333	0,3333/0,3333=1

Die Variable x9k war eine künstliche Variable und hat die Basis verlassen, sie wurde gestrichen.

Tableau 5

	x1	x2	x3	x4	x5k	xü5	xü6	xü7	xü8		
z2	0	0	0	0	0	1	0	0,3333	0,6667	0	
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	0	0	0	0	1	-1	0	-0,3333	-0,6667	0	-
	0	0	1	1	0	0	0	0,1667	-0,1667	0,5	-
	1	0	0	-1	0	0	0	-0,3889	0,0556	0,1667	-
	0	0	0	0	0	0	1	1,3333	-0,3333	0	-
	0	1	0	1	0	0	0	0,2222	0,1111	0,3333	-

Die 1. Phase ist abgeschlossen.

Die zusätzliche Zielfunktion kann gelöscht werden.

Die 2. Phase ist abgeschlossen.

Mit diesem Prozess erhält man die Lösung:

Die optimale Lösung wurde erreicht.

Der maximale Zielwert beträgt z=1

Basisvariablen:

x5k=0; x3=0,5; x1=0,1667; xü6=0; x2=0,3333;

Nichtbasisvariablen:

x4=0; xü5=0; xü7=0; xü8=0;

Da alle noch immer bestehenden Schlupfvariablen = 0 sind, können diese ignoriert werden. Übersetzt man die Lösungsvariablen zurück zu den ursprünglich definierten Variablen, erhält man:

$$q_1 = \frac{1}{6}, \qquad q_2 = \frac{1}{3}, \qquad q_3 = \frac{1}{2}, \qquad q_4 = 0$$

Diese repräsentieren das Optimum des Simplex $z = 1$ unter der Erfüllung der Nebenbedingungen. Um diese Werte zu überprüfen, habe ich sie in das initiale Ungleichungssystem eingesetzt:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \qquad +3q_2 - 2q_3 + q_4 \\
0 &\leq -3q_1 \qquad + q_3 + 4q_4 \\
0 &\leq +2q_1 - q_2 \qquad - 3q_4 \\
0 &\leq -q_1 - 4q_2 + 3q_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \qquad +3(\frac{1}{3}) - 2(\frac{1}{2}) + (0) \checkmark \\
0 &\leq -3(\frac{1}{6}) \qquad + (\frac{1}{2}) + 4(0) \checkmark \\
0 &\leq +2(\frac{1}{6}) - (\frac{1}{3}) \qquad - 3(0) \checkmark \\
0 &\leq -(\frac{1}{6}) - 4(\frac{1}{3}) + 3(\frac{1}{2}) \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Es hat sich ergeben, dass alle Ungleichungen erfüllt sind. Auch die Definitionsbedingungen inklusive Nicht-Negativitäts-Bedingungen sind erfüllt.

$$.\sum q_i = 1 \checkmark,$$

$$q_i \geq 0 \; \forall \; i \checkmark$$

Somit kann ausgeschlossen werden, dass es sich um eine falsche Lösung oder eine Scheinlösung handelt. Die Eindeutigkeit des Resultats ist allerdings noch nicht abgeklärt. Ob die Lösung eindeutig ist und wie sie verstanden werden muss, ist in den Resultaten erläutert.

DIE ARBEIT SOLL MIT EINEM KLEINEN WITZ ABGERUNDET WERDEN – TREFFEN SICH ZWEI SIMPLEX-ALGORITHMEN AM ABEND, SAGT DER EINE «ICH GEBE MIR DIE KANTE», SAGT DER ANDERE «NICHT OPTIMAL»