# Die Notwendigkeit des Bluffs

## Ein Beweis auf Basis der Spieltheorie

Maturitätsarbeit von **Jonas Jost**

Kantonsschule Enge
Betreuer: Lars Fleig
Fachschaft Mathematik

## Problemstellung

Diese Arbeit behandelt eine Entscheidungssituation innerhalb des Pokerspiels. Stellen Sie sich vor, Sie sind Teil einer Pokerrunde und haben bereits in dieser Runde einen grossen Wetteinsatz bezahlt. Leider haben Sie die Tischkarten nicht getroffen und gehen davon aus, dass Sie das schlechteste Blatt der Runde haben. Es bleiben Ihnen somit zwei Möglichkeiten: Entweder Sie steigen aus und verlieren Ihren bisherigen Einsatz oder aber Sie täuschen ein gutes Blatt vor und erhöhen demnach den Wetteinsatz erneut, womit Sie riskieren, sogar noch mehr zu verlieren.
Genau dieser Entscheidung widmet sich diese Arbeit ausgehend von einem mathematischen Blickwinkel. Um die Situation wissenschaftlich zu analysieren habe ich ein vereinfachtes, aber möglichst realitätsgetreues Spielmodell eines Pokerspiels mit zwei Spielern erstellt. Anhand der Spieltheorie soll dieses Spiel gelöst und somit die optimale Strategie bestimmt werden. Enthält diese optimale Strategie zwingend das Konzept Bluff, so ist dessen Notwendigkeit bewiesen.

## Theorie

Gemäss der Spieltheorie ist ein Spieler $p$ eine Spielpartei, die aus $A_p$ Handlungsalternative auswählen kann. Die gewählte Handlungsalternative entspricht der Strategie $s_p$. Treffen die Strategien verschiedener Spieler aufeinander, wird eine Auszahlung $U_p$ realisiert. Mithilfe der Auszahlungsfunktion wird die Auszahlung des Spielers $p$ für einen Strategievektor $S$ abgebildet.

$$U_p : A_1 \times \cdots \times A_{|P|} \to \mathbb{R}$$

Dabei verfolgt jeder Spieler gemäss dem Rationalitätsprinzip das Ziel, seinen eigenen Gewinn zu maximieren. Diese optimale Strategie ist als $s_p^*$ definiert. Die Strategien der weiteren Spieler sind im Fremdstrategievektor $S_{-p}$ zusammengefasst.

$$s_p^* = \arg\max U_p(s_p | S_{-p})$$

Um den Beweis erfüllen zu können, muss gezeigt werden, dass im eigenen Spielmodell die optimale Strategie $s_p^*$ zwingend das Konzept Bluff enthält. Da es sich beim Poker und somit auch beim möglichst realitätsgetreuen Modell um ein nicht-deterministisches Spiel handelt, muss diese Strategie im Raum der gemischten Strategien $m_p$ gesucht werden. Eine gemischte Strategie kombiniert verschiedene Handlungsalternativen mit zu bestimmenden Wahrscheinlichkeiten $q_i$.

## Methodik

Der Beweis erfolgte in drei Schritten: Erstellung des Spielmodells, Übertragung des Spielmodells in die spieltheoretische Form und schliesslich das Lösen des Modells mit dem Simplex-Algorithmus.

Im ersten Schritt wurde ein Spielmodell von Joerg Bewersdorff analysiert und ausgebaut. Ich entschied mich für eine Spielsituation mit zwei Spielern und drei Kartenhöhen. In der Abbildung 1 ist der schematische Entscheidungsbaum dieses selber erstellten Modells ersichtlich. Als nächstes galt es, dieses Modell mithilfe des Programms Microsoft Excel in die Normalform zu bringen und alle Strategien aufzuführen. Um die finale Auszahlungsmatrix zu erreichen, mussten zusätzlich dominierte Strategien entfernt und das Spiel symmetrisiert werden. Anschliessend konnte anhand des Simplex Verfahrens die optimale Strategie bestimmt werden und das Spiel somit gelöst werden.

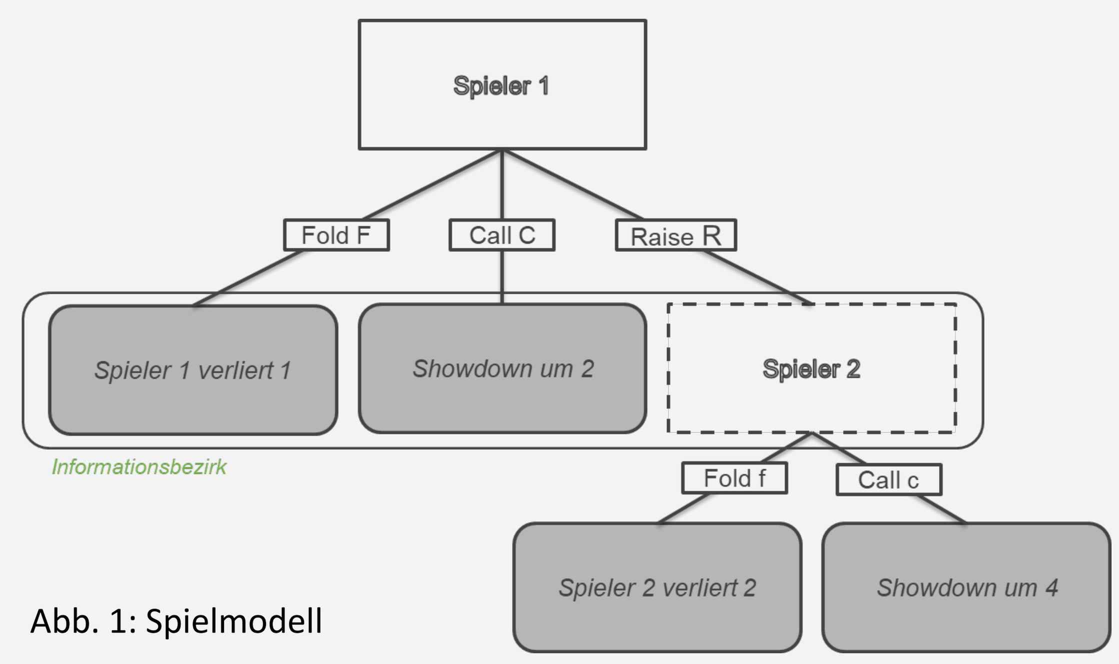


Abb. 1: Spielmodell

## Lösung

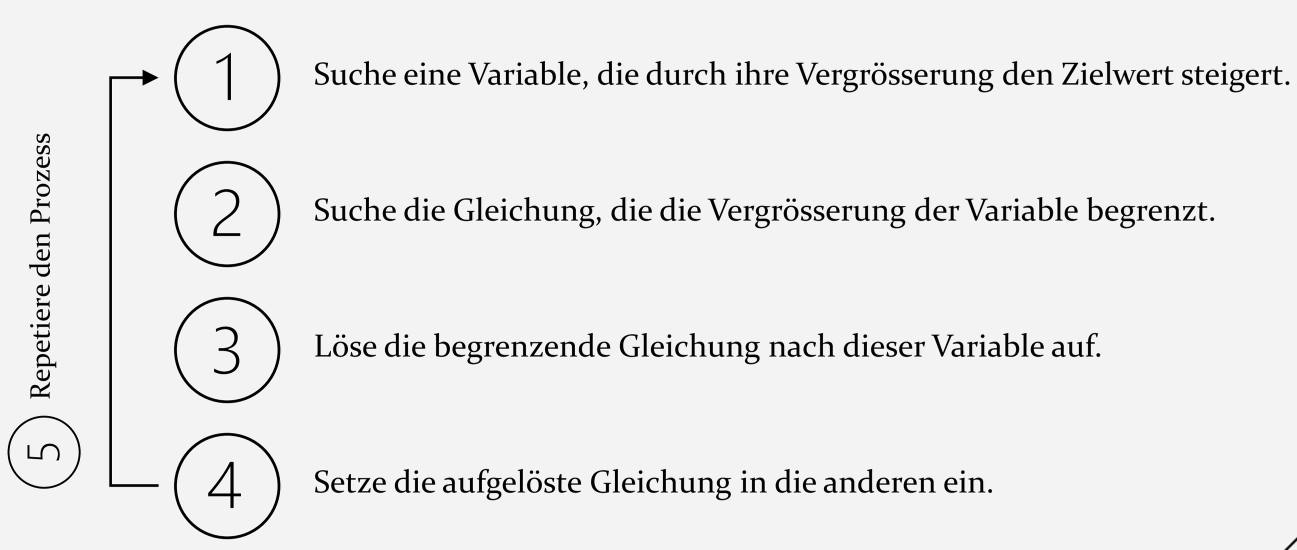


Abb. 2: Simplex-Verfahren

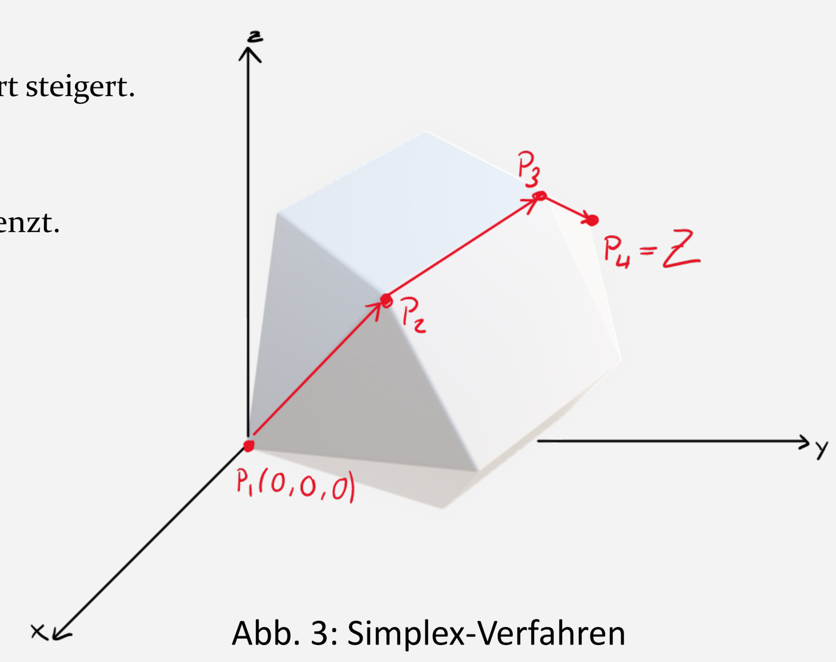


Abb. 3: Simplex-Verfahren

Mit der symmetrischen Normalform kann nach Émile Borel ein Ungleichungssystem erstellt werden. Dieses kann mit dem Simplex-Verfahren nach dem in der Abbildung 2 gezeigten Schema gelöst werden. So nähert man sich im $n$-dimensionalen Raum dem Optimum, sprich Zielwert $Z$. Die Abbildung 3 zeigt eine geometrische Deutung dieses Prozesses.
Der Zielwert $Z$ ist in klassischen linearen Optimierungsaufgaben die zu optimierende Gleichung. In der Spieltheorie ist dieser Zielwert die Summe aller Handlungsalternativen, womit der Zielwert von $Z = 1$ bereits bestimmt ist. Wichtiger als der Zielwert selbst, sind in der Spieltheorie die verschiedenen Parameter $q_i$, die unter der Erfüllung der Nebenbedingungen den Zielwert erreichen; sie entsprechen einer gemischten Strategie $m_p$.

Durch vorherige Elimination der dominierten Strategien konnten die zu Beginn bestehenden 243 Handlungsalternativen auf vier reduziert werden. Die vier nicht-dominierten Handlungsalternativen können nicht eliminiert werden und sind somit in der finalen Normalform enthalten. Im letzten Lösungsschritt geht es darum, mit dem erörterten Simplex-Verfahren die optimale Wahrscheinlichkeitsverteilung $(q_1, \ldots, q_4)$ dieser Handlungsalternativen zu bestimmen. Die Handlungsalternativen hinter den Wahrscheinlichkeiten $q_2$ und $q_4$ sehen für Spieler 1 bei tiefer Karte eine Erhöhung des Einsatzes vor und enthalten somit den Bluff.
Die mit dem Simplex-Verfahren gefundene Lösungsstrategie $m_p^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right)$ entsprach nicht der gesamten Lösung, da mit dem Simplex-Verfahren nur Ecken erreicht werden können, im behandelten Fall aber gleich eine ganze Kante das Optimum erreichte. Ich konnte die Lösung auf alle Linearkombinationen der beiden Ecken $\vec{A}$ und $\vec{B}$ dieser Kante erweitern.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r_s} = s\vec{A} + (1-s)\vec{B} \quad .0 \leq s \leq 1$$

## Fazit

Da alle Strategien, die auf der Lösungsstrecke liegen, die Bluff-Handlungsalternative mit einer Wahrscheinlichkeit von $> 0$ enthielten ($\forall s,\ q_2 + q_4 > 0$), konnte ich den Beweis für gültig erklären. Die optimale Strategie in meinem Spielmodell muss indes einen Bluff enthalten, womit die Notwendigkeit validiert ist.

$$M_p^* \subseteq M_p(Bluff) \ .\textit{für eigenes Spielmodell} \ ☑$$

Aber was bedeutet der Beweis nun eigentlich? Es konnte gezeigt werden, dass im erstellten Spielmodell geblufft werden muss, um den maximalen Auszahlungswert zu erreichen. Spielt man rein rational, so gibt man dem Gegner Informationen, die gegen einen verwendet werden können. Ohne manchmal zu bluffen, wäre es nicht möglich, bei tiefer Karte den Blind zu verteidigen. Da alle wichtigen Gegebenheiten des Pokerspiels auch im Spielmodell enthalten sind, ist es naheliegend, dass der Bluff auch in einer optimalen Strategie für das tatsächliche Pokerspiel enthalten sein muss.
Wieso ist das entscheidend? Hinter allen grossen Herausforderungen der Welt steckt eine Entscheidung. Die Spieltheorie bietet die wissenschaftliche Grundlage, solche Entscheidungsprobleme zu analysieren und zu lösen. Diese Arbeit zeigt exemplarisch die Möglichkeiten in der Spieltheorie und soll zur weiteren Forschung anregen. Keineswegs ist die Spieltheorie mit dem Beenden meiner Arbeit ein abgeschlossenes Kapitel und ich hoffe, dass deren Grundlagen in eine nachhaltige und aufgeschlossene Welt von morgen einfliessen werden.

Quellen

Bewersdorff, Jörg. *Glück, Logik und Bluff; Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen.* Limburg: Springer Spektrum, 2018.
Lück, Stefan, und Claudio Weck. *Eine spieltheoretische Betrachtung des Pokerspiels.* Darmstadt, 8. April 2008.
Leininger, Prof. Dr. Wolfgang, und PD Dr. Erwin Amann. *Einführung in die Spieltheorie.* Dortmund, 2008.