

LEVITRON - DER SCHWEBENDE KREISEL

Eine Maturitätsarbeit an der
KANTONSSCHULE LIMMATTAL

vorgelegt von

CIRIL ROBERT CLERC

Klasse M6a

im Fach Physik

betreut von

Christian Helm, Dr.

1. Zusammenfassung

Der Levitron ist ein Spielzeug, das ein Schweben eines Kreisels aufgrund eines Permanentmagneten ermöglicht. Aus praktischer Erfahrung ist das eine Überraschung, da zwei Magnete nicht übereinander balanciert werden können.

Stabiles Schweben des Kreisels ist möglich, wenn sich die Präzessionsachse des Kreisels gemäss den lokalen magnetischen Feldlinien ausrichtet. Dadurch befindet sich der Kreisel in einem lokalen Energieminimum und ist in seiner Lage gefangen. Damit die Präzessionsachse richtig ausgerichtet wird, muss der Kreisel eine passende Winkelgeschwindigkeit haben. Dreht der Kreisel zu schnell oder langsam, ist stabiles Schweben nicht möglich.

Durch Luftreibung wird der Kreisel stets langsamer, was die maximale Flugzeit des Kreisels limitiert. Um dem entgegenzuwirken, wird in dieser Maturaarbeit ein elektrischer Antrieb gebaut, der die Nutationsfrequenz des Kreisels durch magnetische Felder stabilisiert und konstant hält. Dadurch kann der Kreisel nicht mehr langsamer werden und behält die momentane Winkelgeschwindigkeit bei. Es wurde gezeigt, dass «ewiges» Schweben möglich ist. Es wurden zudem Messungen am Kreisel durchgeführt und mit der erarbeiteten Theorie verglichen.

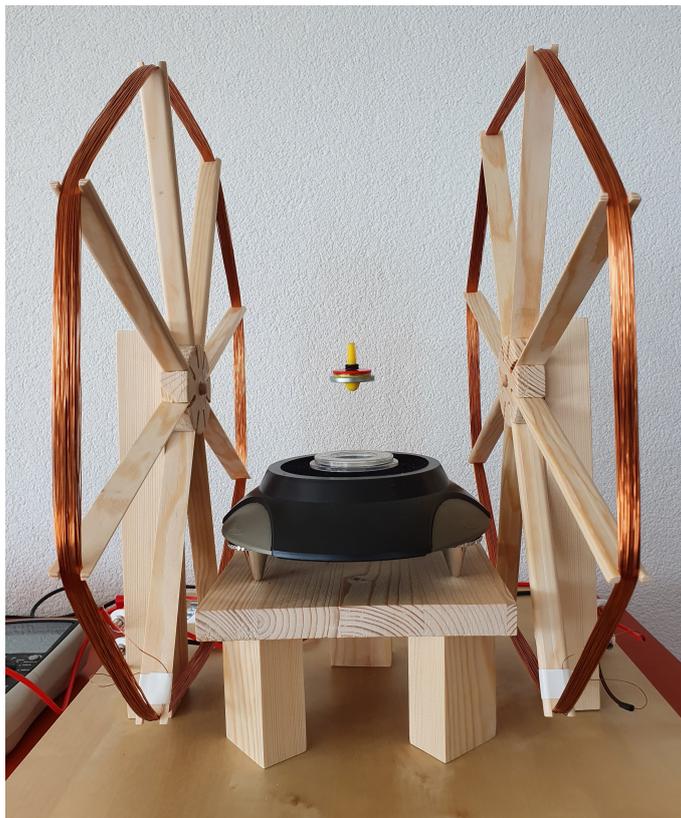


Abbildung 1: Der Levitron mit den Spulen des Antriebs. Der Kreisel schwebt dank des Antriebs praktisch ewig.

Inhaltsverzeichnis

1. Zusammenfassung	2
2. Einleitung	4
3. Funktionsweise des Levitrons	5
4. Winkelgeschwindigkeitsmesser	8
4.1. Einleitung	8
4.2. Messapparatur/ Messaufbau	8
4.3. Messung	9
4.4. Analyse der Messung	10
4.5. Bestimmen der Periodendauer	11
4.6. Auswertung der Messung	12
4.7. Diskussion	14
5. Planung des Antriebs	15
5.1. Einleitung	15
5.2. Skizze des Antriebs	15
5.3. Funktionsweise des Antriebs	16
5.4. Dimensionen des Antriebs	16
6. Bau des Antriebs	18
6.1. Materialbeschaffung	18
6.2. Bau	19
7. Testen des Antriebs	19
8. Präzession des Kreisels	20
8.1. Einleitung	20
8.2. Experiment	20
8.3. Auswertung	21
8.4. Diskussion	23
8.5. Präzession und Nutation	24
8.6. Thesen	25
9. Diskussion und Ausblick	27
10. Danksagungen	27
11. Literaturverzeichnis	27
12. Einhalten rechtlicher Vorlagen	29
A. Anhang Drehfrequenzmesser	30
A.1. Arduino Programm	30
A.2. Abbildungen der weiteren Messreihen	31
B. Anhang Bilder vom Bau des Antriebs	35

2. Einleitung

Der Levitron ist ein Spielzeug, welches im Jahre 1976 von Roy M. Harrigan erfunden und 1983 patentiert wurde [1]. Der Levitron besteht aus zwei Teilen: einem ringförmigen Permanentmagneten und einem kleineren Kreisel, welcher ebenfalls magnetisch ist. Der Kreisel kann durch Andrehen auf einer Starter-Platte und langsames Anheben dieser Platte über den ringförmigen Basismagneten zum Schweben gebracht werden. Wichtig ist, dass der Kreisel vorher auf das richtige Gewicht eingestellt wurde, denn sonst schwebt er nicht. Dies erfolgt durch Hinzufügen und Entfernen von kleinen Gewichtsrings. Der magnetische Kreisel schwebt dann für ca. 3 min frei in der Luft, bis er zu langsam wird und herunterfällt. Dies funktioniert ohne Elektromagnete, sondern nur mit Permanentmagneten. Das Interessante an diesem Levitron ist, dass das Earnshaw-Theorem besagt, dass es kein magnetisches Feld gibt, das Objekte im Gleichgewicht halten kann [2]. Deshalb ist auf den ersten Blick unklar, wieso der Levitron funktioniert.

In dieser Arbeit werden drei Hauptziele verfolgt. Erstens: zu verstehen, wie der Levitron funktioniert und auf welchen physikalischen Gesetzen das Schweben des Levitron-Kreisels basiert. Zweitens: das Bestimmen und Messen verschiedener Einflussgrößen und Erkennen, welchen Einfluss diese auf das stabile Schweben des Kreisels haben. Drittens: der Bau eines Antriebs, welcher ein verlängertes oder ewiges Schweben des Kreisels ermöglicht. Nach Erreichen der beiden anderen Hauptziele sollte dies möglich sein.

Die persönliche Motivation für diese Arbeit war das Interesse am Thema Magnetismus in Physik. Da ich bereits ein Levitron hatte und es mir ein Rätsel war, wie dieser funktioniert, wurde der Levitron als Thema gewählt.

Bei der Quellenwahl wurde bewusst auf wissenschaftliche Publikationen (Paper) fokussiert, welche mir Dr. Helm half zu finden. Es gibt auch sehr viele schlechte Quellen, die die Theorie ungenau oder falsch erklären. Dies war besonders bei Internetquellen der Fall. Das Internet wurde deshalb vor allem zum Verständnis der in den Paper verwendeten Mathematik berücksichtigt. Es wurden auch Patente zum Thema Levitron angeschaut. Diese halfen jedoch nicht für das Verständnis der Theorie und sind deshalb nicht verwendet worden.



(a)



(b)

Abbildung 2: Der gekaufte Levitron, mit dem schwebenden Kreisel (a). Der magnetische Kreisel mit den Gewichtsrings (b).

3. Funktionsweise des Levitrons

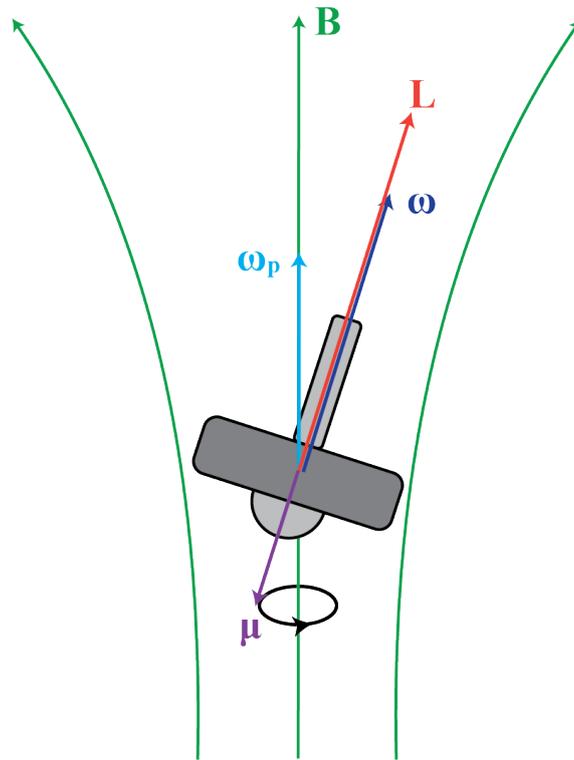


Abbildung 3: Die Präzessionsachse ω_p des Kreisels richtet sich an der lokalen Magnetfeldrichtung \mathbf{B} aus. Nur so kann der Kreisel schweben.

Um zu verdeutlichen, wie der Levitron funktioniert, muss zuerst erklärt werden, wie er nicht funktioniert.

Es wird angenommen, dass der Kreisel sehr schnell dreht. Dadurch kann der Kreisel nicht kippen, da die Drehimpulserhaltung des Drehimpulses \mathbf{L} des Kreisels dies verhindert. Somit wird der Kreisel mit dem magnetischen Dipolmoment $\boldsymbol{\mu}$ vom entgegengesetzten Magnetfeld \mathbf{B} des Basismagneten abgestossen. Der Kreisel schwebt auf der Höhe z , bei welcher die Kraft der Gravitation und die magnetischen Kräfte im Gleichgewicht sind. Zudem muss an dieser Stelle die potentielle Energie U ein lokales Minimum in alle Richtungen x, y, z haben. Sonst würde eine kleine Störung den Kreisel auf eine Seite wegdriften lassen. Die potenzielle Energie U ist $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} + mgz = \mu B_z + mgz$, wobei m die Masse des Kreisels ist und g die Gravitationskonstante. Folgendes sind die Bedingungen einer Funktion f , damit sich an der Stelle x_0 ein lokales Minimum befindet [3]:

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0. \quad (1)$$

Dies widerspricht jedoch dem Earnshaw-Theorem [2], welches überall im Raum gilt. Das Earnshaw-Theorem sagt, dass es kein Gleichgewicht gibt, das zwei magnetische Objekte im Gleichgewicht halten kann.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Die Summe der partiellen Ableitung des Magnetfeldes \mathbf{B} in alle Richtungen ist gemäss (2) null. Somit ist die zweite partielle Ableitung des Magnetfeldes B_z in z -Richtung:

$$\nabla^2 \cdot B_z = \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (3)$$

Somit kann es kein lokales Minimum der potenziellen Energie U am Schwebepunkt des Kreisels geben. Es würde sich an genannter Stelle um einen Sattelpunkt handeln. Der Kreisel würde sich dadurch nicht in einem stabilen, sondern in einem labilen Gleichgewicht befinden.

Die Praxis zeigt jedoch, dass der Kreisel während mehreren Minuten stabil über dem Basismagneten schwebt. Ist somit das Earnshaw-Theorem falsch? Die Antwort ist «Nein». Dieses Theorem gilt nur für stationäre Magnete und nicht für bewegte [2].

In Quelle [4] wird der Grund, wieso der Kreisel stabil schwebt, folgendermassen beschrieben:

«The gyroscopic action must do more than prevent the top from flipping. It must act to continuously align the top's precession axis to the local magnetic field direction. Under suitable conditions, the component of the magnetic moment along the local magnetic field direction is an adiabatic invariant. When these conditions are met, the potential energy depends only on the magnitude of the magnetic field and gravity.»

Dies bedeutet, dass die Präzession das Dipolmoment automatisch an den lokalen Magnetfeldlinien des Basismagneten ausrichten muss, um zu verhindern, dass der Kreisel kippt (siehe Abbildung 3). Dies ist der Fall, solange der Kreisel nicht zu stark gestört wird. Dadurch hängt die potentielle Energie U nur noch vom Betrag des Magnetfeldes und der Gravitation ab.

Es werden nun zwei Vereinfachungen gemacht. Es wird erstens angenommen, dass die Masse des Kreisels und das Zentrum des magnetischen Dipolmoments übereinstimmen. Zweitens wird angenommen, dass der Kreisel schnell dreht, somit ist der Drehimpuls entlang der Drehachse, welche sich mit der Achse des Dipolmoments deckt. Somit ist die potentielle Energie U des Kreisels:

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} + mgz = |\boldsymbol{\mu}| |\mathbf{B}| + mgz \approx \mu B + mgz. \quad (4)$$

Mit einer Taylorreihe kann das magnetische Feld um den Schwebepunkt entwickelt werden. Als Basis dient ein Zylinderkoordinatensystem B_z und B_r . Die Höhe zum Koordinatenursprung ist z und der Abstand zur z -Achse ist r . Die potentielle Energie U in Abhängigkeit von z und r ist somit gemäss [4]:

$$U \approx \mu \left(B_0 + \left\{ \frac{mg}{\mu} + S \right\} z + K z^2 + \frac{1}{2} K \left\{ \frac{(S/2)^2}{B_0 K} - 1 \right\} r^2 + \dots \right), \quad (5)$$

mit S und B gleich:

$$S = \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad K = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}. \quad (6)$$

Die Gleichung (1) definiert die Bedingungen für ein lokales Minimum einer Funktion f . Dies bedeutet, dass die partiellen Ableitungen der potentielle Energie U folgende Bedin-

gungen erfüllen müssen:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > 0 \text{ und } \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} > 0 \quad (7)$$

Dadurch muss am Schwebepunkt folgendes erfüllt sein, damit der Kreisel in allen Richtungen gefangen ist:

$$S = -\frac{mg}{\mu}, \quad K > 0 \text{ und } \frac{(S/2)^2}{B_0 K} - 1 > 0. \quad (8)$$

Dies erklärt, weshalb die Masse m des Kreisels auf wenige Milligramm genau eingestellt werden muss, um einen stabilen Schwebezustand zu erreichen. Das Verhältnis von m/μ muss hierzu genau stimmen, damit die erste geschweifte Klammer $\{$ in der Gleichung (5) am Schwebepunkt gegen null geht.

$$U(z, r) = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 r^2$$

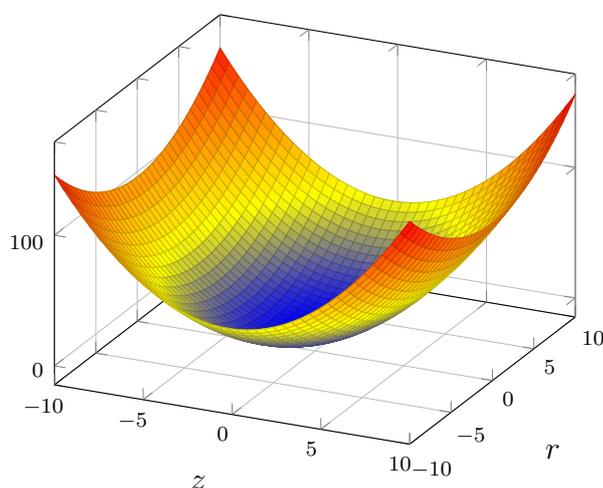


Abbildung 4: Graph zu Verdeutlichung des lokalen Minimums der potentiellen Energie U in Abhängigkeit von z und r . Der Graph zeigt keine gemessenen Grössen, sondern ist mit vier Beispielskonstanten C_1 - C_4 geplottet.

Es wurde somit gezeigt, dass der Kreisel in der Luft in ein stabiles Gleichgewicht gebracht werden kann, wenn sich seine Präzessionsachse korrekt ausrichtet. Jedoch muss angemerkt werden, dass dies nur für bestimmte Winkelgeschwindigkeiten ω des Kreisels funktioniert. Es wird angenommen, dass der Kreisel schnell dreht. Wenn er jedoch zu schnell dreht, schwebt der Kreisel auch nicht mehr stabil. Der Grund ist, dass die Präzession und die Winkelgeschwindigkeit indirekt proportional sind:

$$\omega_p = -\frac{\mu \mathbf{B}_0}{J\omega}. \quad (9)$$

\mathbf{B}_0 ist die Magnetfeldstärke des Basismagneten auf der Schwebhöhe des Kreisels und J ist das Trägheitsmoment des Kreisels in Richtung der Winkelgeschwindigkeit. Wenn der Kreisel zu schnell dreht, ist die Präzession ω_p zu langsam, um die Präzessionsachse am lokalen magnetischen Feld auszurichten, was eine Bedingung für das Schweben ist. Deshalb existiert eine maximale Winkelgeschwindigkeit ω_{\max} des Kreisels.

Es gibt auch eine minimale Winkelgeschwindigkeit ω_{\min} . Ein Kreisel, der zuerst vertikal steht, also schnell dreht, kann nur bis zu einer gewissen Winkelgeschwindigkeit aufrecht bleiben. Diese kritische Winkelgeschwindigkeit ist der Übergang zwischen dem schnellen Kreisel und dem schlafenden Kreisel. Formel (5-71) auf S.193 aus [5] sagt:

$$\omega_{\min}^2 = 4 \frac{mglJ_p}{J^2}. \quad (10)$$

l ist der Abstand des Schwerpunktes zum Auflagepunkt. Dies kann umgeformt werden zu [4]:

$$\omega_{\min} = \frac{2}{r_{\text{eff}}} \sqrt{\frac{\mu}{m} B \frac{J_p}{J}}, \quad (11)$$

wobei der effektive Radius $r_{\text{eff}} = \sqrt{J/m}$. J ist das Trägheitsmoment in Richtung der Winkelgeschwindigkeit und J_p ist senkrecht zu J . Der Kreisel schwebt also nur, wenn für seine Winkelgeschwindigkeit ω gilt: $\omega_{\max} \geq \omega \geq \omega_{\min}$.

4. Winkelgeschwindigkeitsmesser

4.1. Einleitung

Um die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels zu messen, wird ein Winkelgeschwindigkeitsmesser gebaut. Dadurch ist es möglich, den Verlauf der Winkelgeschwindigkeit des Kreisels aufzuzeichnen. Somit kann der Zusammenhang zwischen dem stabilem Schweben und der Umdrehungsgeschwindigkeit des Kreisels erforscht werden. Dies soll auch für die Planung des zu bauenden Antriebs helfen.

4.2. Messapparatur/ Messaufbau

Das Messen der Winkelgeschwindigkeit ω des Kreisels wird durch Helligkeitsänderungen, welche von einem Sensor gemessen werden, erreicht. Dafür wird eine Seite des Kreisels schwarz angemalt. Auf einen dunklen Aufkleber wird verzichtet, da dies zu einer Unwucht des Kreisels führen könnte. Eine Velolampe strahlt von der Seite direkt auf den Kreisel. Der Sensor befindet sich neben der Lampe. Die schwarze Seite des Kreisels reflektiert weniger Licht als die normale Seite. Dadurch kann die Orientierung des Kreisels festgestellt werden. Die Messung findet in einem abgedunkelten Raum statt, um einen besseren Hell-Dunkel-Kontrast zu erhalten. Zudem wurde der Sensor mit schwarzem Klebeband abgeschirmt, um nur das Eintreten des Lichts von vorne zu ermöglichen. Somit können Störsignale der Umgebung minimiert werden. Dafür muss der Sensor jedoch sehr genau ausgerichtet werden (Siehe Abbildung 5).

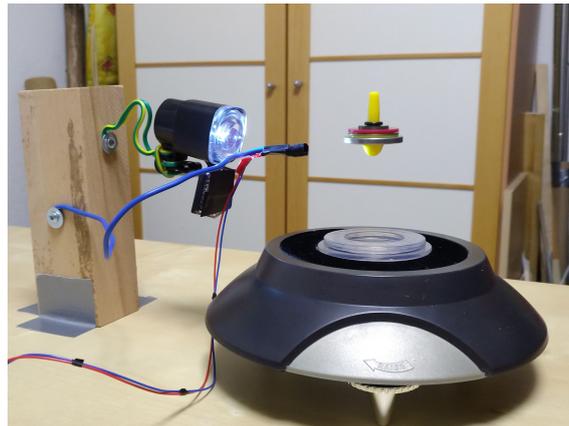


Abbildung 5: Der Kreisel schwebt vor dem Phototransistor. Dieser misst die Hell-Dunkel-Änderungen. So kann die Winkelgeschwindigkeit ω des Kreisels bestimmt werden.

Der Sensor ist ein Phototransistor, welcher mit einem Vorwiderstand R_0 zwischen den Vcc (5V) und dem GND (0V) eines Arduino geschaltet ist. Der Vorwiderstand R_0 verhindert einen Kurzschluss. Wie in Abbildung 6 gezeigt, führt ein Output zum Messeingang des Arduino. Da ein Phototransistor seinen Widerstand R_{photo} proportional zur Helligkeit ändert, kann der Arduino die am Output abfallende Spannung relativ zum GND messen (siehe Abbildung 6).

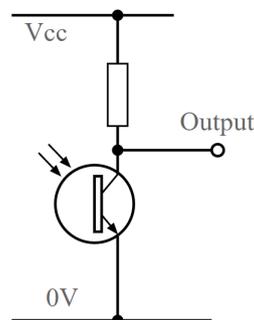


Abbildung 6: Schaltkreis des Phototransistors. [6]

Um die Messungen anzeigen und abspeichern zu können, ist ein Laptop mittels eines USB-Kabels am Arduino angeschlossen. Der Laptop und der Arduino stehen etwa einen halben Meter vom Levitron entfernt, um das Experiment möglichst nicht zu beeinflussen. Der Phototransistor befindet sich einem Abstand von mindestens 3 cm vom schwebenden Kreisel entfernt, da der Phototransistor leicht ferromagnetisch ist und deshalb das Schweben des Kreisels nicht mehr möglich wäre. Die Lampe hat noch einen grösseren Abstand. Der Sensor und die Lampe sind mittels eines Kupferdrahtes an einem Holzstativ befestigt. Holz und Kupfer sind nicht magnetisierbar und sollten das Schweben des Kreisels somit nicht beeinflussen. Das Arduino-Programm ist im Anhang A erklärt.

4.3. Messung

Es werden drei Messreihen durchgeführt. Der Kreisel wird bei jeder Messung zuerst mit dem Anlasser beschleunigt und dann zum Schweben gebracht. Dann wird der Arduino

gestartet. Nach ca. 3 Minuten fällt der Kreisel herunter und die Messung wird gestoppt. Die Messdaten werden von der Arduino-Konsole in eine Excel-Datei kopiert. Ein Beispiel, wie die Messdaten aussehen, ist in Tabelle 1 aufgeführt. Die linke Spalte ist die Zeit in Millisekunden seit dem Start der Messung und die rechte Spalte zeigt den Messwert (zwischen 0 und 1023). Die drei Messreihen werden hier nicht vollständig aufgelistet, da es sich jedes Mal um etwa 180'000 Zeilen an Messungen handelt. Die Abtastrate des Sensors beträgt 1 ms.

Zeit [ms]	Messwert
26487,	397
26488,	417
26489,	437
26490,	456
26491,	472
26492,	487

Tabelle 1: Beispiel des Outputs des Arduino.

4.4. Analyse der Messung

In Excel wird ein Graph aus den Messdaten geplottet, mit x-Achse als die Zeit und y-Achse als Messwert. Zur Analyse der Daten wird ein kleiner Ausschnitt auf der x-Achse vergrössert. Die Abbildungen 7 und 8 zeigen einen Ausschnitt von 3 s bzw. 500 ms.

In der Messreihe 1 sind zwei verschiedene regelmässige Schwingungen zu erkennen. Die längere in Abbildung 7 hat ungefähr eine Frequenz von 1 Hz. Die kürzere Schwingung in Abbildung 8 hat ungefähr eine Frequenz von 30 Hz. Diese kürzere Schwingung ist die relevante Messung. Es sind die Helligkeitsänderungen, die entstehen, wenn sich der Kreisel mit der schwarzen Markierung dreht. Jede Periode entspricht einer Umdrehung des Kreisels. Die ungefähre Periodendauer deckt sich mit den Werten aus der Publikation [4]. Die kürzere Schwingungsdauer zeigt keine grossen Unterschiede bei den verschiedenen Messreihen auf (Anhang A: Abbildung 8, 23 und 25). Zwei auffällige Merkmale sind, a) dass das Minimum dieser Schwingungen viel breiter ist als das Maximum, und b) dass beim Sinken des Messwertes viel weniger Messpunkte vorhanden sind als beim Anstieg des Werts. Es wird vermutet, dass dies mit dem Arduino zu tun hat, z.B. wie dieser die Spannung misst.

Das Interessante ist die lange Schwingung, denn diese war nicht Ziel der Messung. Diese längere Schwingung kann durch die Flugbahn des Kreisels in der horizontalen Ebene erklärt werden. Der Kreisel schwebt nicht ruhig an einem Punkt, sondern bewegt sich ständig in verschiedene Richtungen. Er taumelt sozusagen wie um einen Fixpunkt in der Mitte des Levitrons. Wenn sich der Kreisel dem Phototransistor nähert, wird die Helligkeit erhöht und wenn er sich wieder weg bewegt, wird die Helligkeit im Durchschnitt wieder kleiner. In den Messreihen 2 und 3 (Anhang A: Abbildungen 22 und 24) sind ähnliche Perioden zu erkennen. Sie sind jedoch weniger regelmässig oder ausgeprägt (vorallem in Messreihe 2). Der Grund liegt im Messaufbau, da der Phototransistor nicht immer perfekt eingestellt ist, um den Kreisel gut zu erfassen.

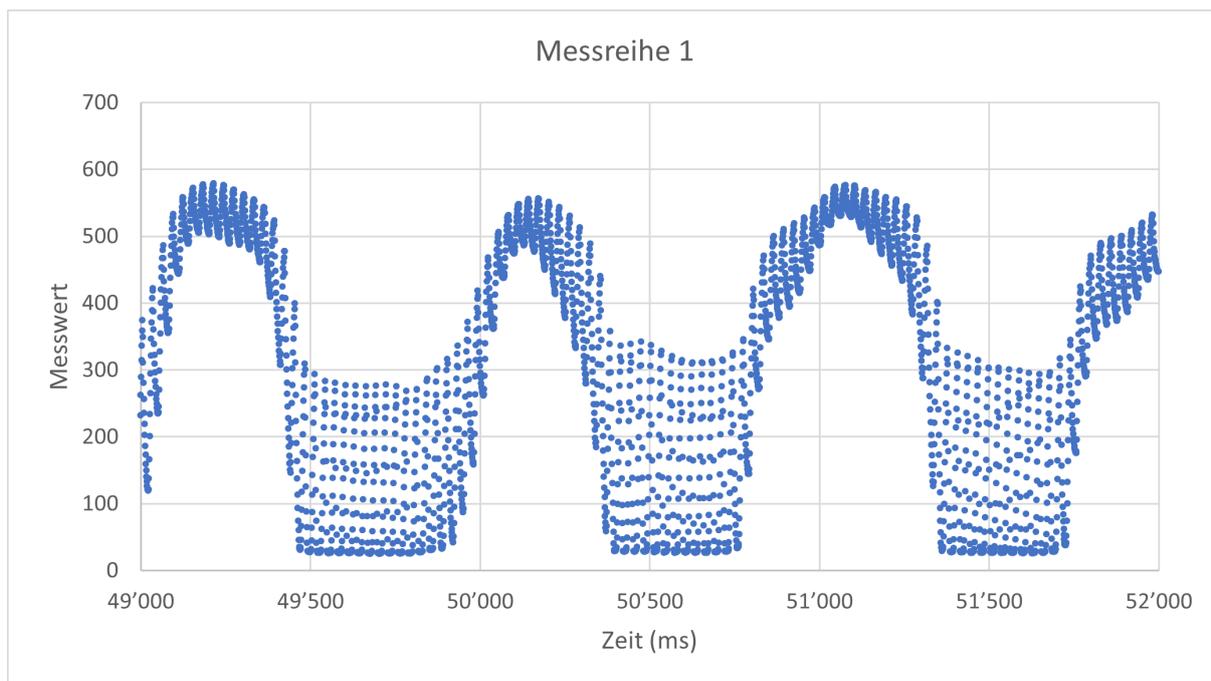


Abbildung 7: Messwerte in einem Intervall von 3 s der Messreihe 1. Es sind Perioden von ca. 1 Hz zu sehen.

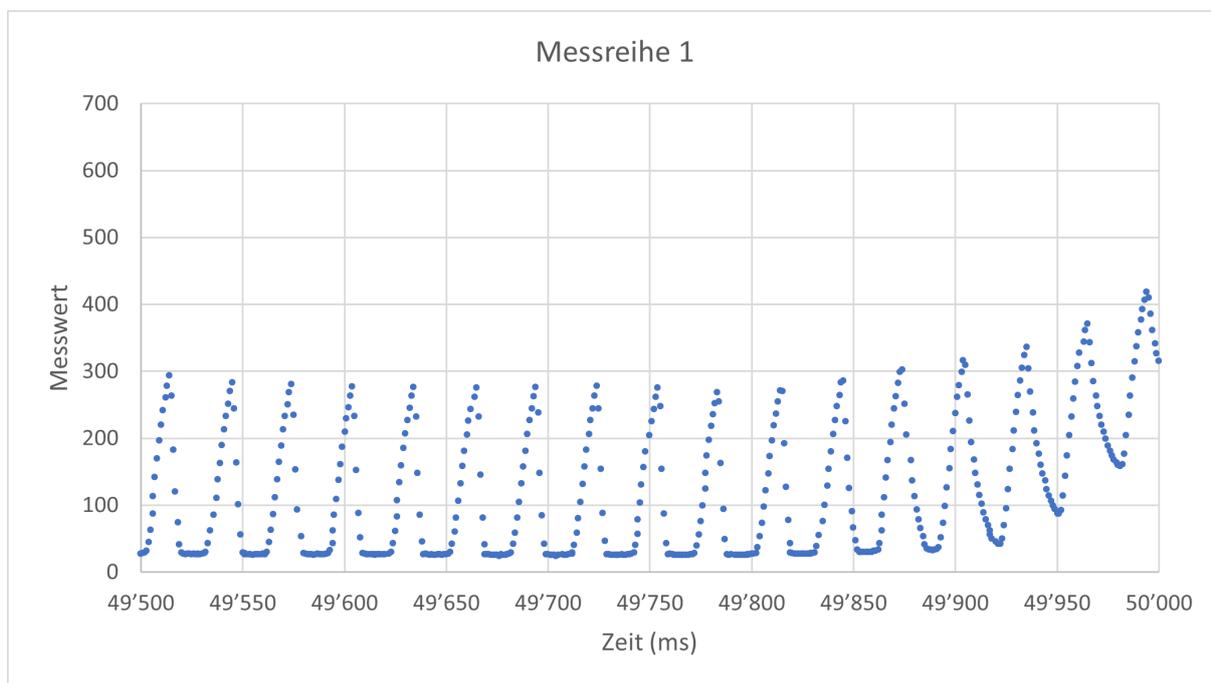


Abbildung 8: Messwerte eines 500 ms Ausschnittes des Intervalls gemäss Abbildung 7 der Messreihe 1. Es sind Perioden von ca. 30 Hz zu erkennen.

4.5. Bestimmen der Periodendauer

Um die Änderung der momentanen Drehgeschwindigkeit des Kreisels während der Flugzeit bestimmen zu können, muss die Periodendauer aus den Abbildungen 8 sowie 23 und 25 (siehe Anhang) bestimmt werden. Hierfür wurden verschiedene Verfahren ausprobiert

und wieder verworfen. All diese Verfahren wurden in Excel gerechnet.

Zuerst ist versucht worden, jedes Mal, wenn der Messwert über einen bestimmten Schwellwert geht, als eine Periode zu zählen. Dies wurde vor der Messung dieser drei Messreihen durchgeführt. Zu dieser Zeit war noch unbekannt, dass der Durchschnitt der Messwerte schwankt. Dadurch funktionierte dieses Verfahren nicht, da der Schwellwert sich nicht automatisch der Durchschnittshelligkeit anpasst.

Als das Schwanken der Durchschnitte der Messwerte bekannt war, wurde versucht, durch Ableiten der Schwingung die Hoch- und Tiefpunkte der Schwingung zu bestimmen, da dort die Steigung Null gleich null ist. Dies funktionierte ebenfalls nicht, denn es war kein klares Muster in der Ableitung zu erkennen. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass die Periode der Schwingung nur aus etwa 30 Messpunkten besteht.

Danach wurde eine schnelle Fourier-Transformation auf ein Zeitintervall der Messreihe 1 von 130 ms durchgeführt. Dies entspricht ungefähr 4 Perioden. Dadurch konnte der Hochpunkt im Graphen der Fourier Transformation bestimmt werden. Er entspricht der Periodendauer der Schwingung. Die erhaltene Periodendauer entsprach ca. 21 Hz. Dies ist jedoch zu ungenau, da der erwartete Wert um die 32 Hz liegen sollte. Dieser erwartete Wert wurde durch manuelles Abzählen der Hochpunkte ermittelt. Deshalb wurde die Fourier-Transformation ebenfalls nicht verwendet.

Die erfolgreiche Methode war das Bestimmen der Hochpunkte der Messung mit einer If-Funktion in Excel. Sobald der Hochpunkt gefunden worden ist, wird die Zeit herausgeschrieben. Dadurch kann dann mithilfe der Zeitdifferenzen zwischen den Hochpunkten die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels bestimmt werden. Die If-Funktion funktioniert wie folgt: Die Funktion wird auf jeden Messpunkt angewendet. Wenn der Messpunkt grösser ist als alle folgenden 4 Messpunkte und der Messpunkt grösser oder gleich als die 4 vorherigen Messpunkte ist, dann ist dieser Messpunkt ein Hochpunkt. Diese If-Funktion funktioniert auch, wenn es zwei Hochpunkte sehr nahe beinander gäbe. In diesem Fall wird nur der erste genommen. Die berechneten Geschwindigkeiten sind im Kapitel 4.6 aufgeführt.

4.6. Auswertung der Messung

Durch die im vorherigen Kapitel zuletzt beschriebene Methode wird eine Reihe an Zeitpunkten aller Hochpunkte erhalten. Die Zeitdifferenz zweier aufeinanderfolgenden Hochpunkte ist die Periodendauer T . Die Winkelgeschwindigkeit ω des Kreisels in rad s^{-1} ist $\omega = 2\pi\frac{1}{T}$. Beziehungsweise wäre die Drehfrequenz f des Kreisels: $\omega = 2\pi f$. Der Verlauf der Drehfrequenz des Kreisels ist in der Abbildung 9 dargestellt.

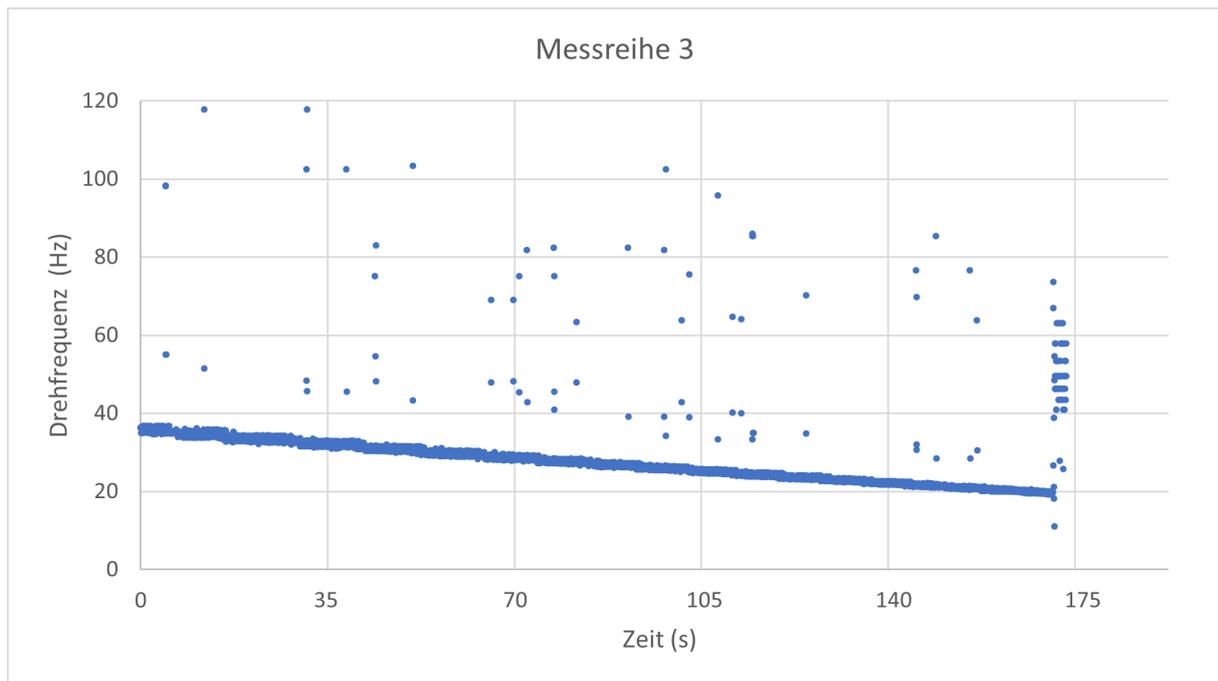


Abbildung 9: Die Drehfrequenz f (in Hz) des Kreisels während der Messung 3.

Es ist gut ersichtlich, wie die Drehfrequenz f des Kreisels über die Zeit abnimmt. Dies ist in der dicken Geraden in der Abbildung 9 zu erkennen. Die Messreihen haben jedoch viele Ausreisser. Diese entstehen, wenn die Auswertung einen falschen Hochpunkt erkennt. Dies führt zu Scheinumdrehungen des Kreisels. Eine weitere Ungenauigkeit der Messmethode ist, dass die Gerade sehr dick ist. Dies ist aufgrund dessen, dass die Periodendauer T einer Umdrehung auf 1ms genau ist, somit ist der Messfehler in der Dicke der Gerade ersichtlich. Die berechnete Geschwindigkeit nimmt nicht konstant ab, sondern nur ihr Mittelwert.

In einem letzten Verfahren werden die meisten Ausreisser aussortiert und die Gerade stärker fokussiert. Das Verfahren besteht darin, dass jeweils der Durchschnitt von 30 Messwerten genommen wird. Es werden jedoch nur die Drehfrequenzen berücksichtigt, welche nicht mehr als 10% von diesem Durchschnitt abweichen. Dadurch können die grossen Ausreisser ausgesiebt werden. Siehe Abbildung 10 (und im Anhang A: Abbildungen 28 und 29).

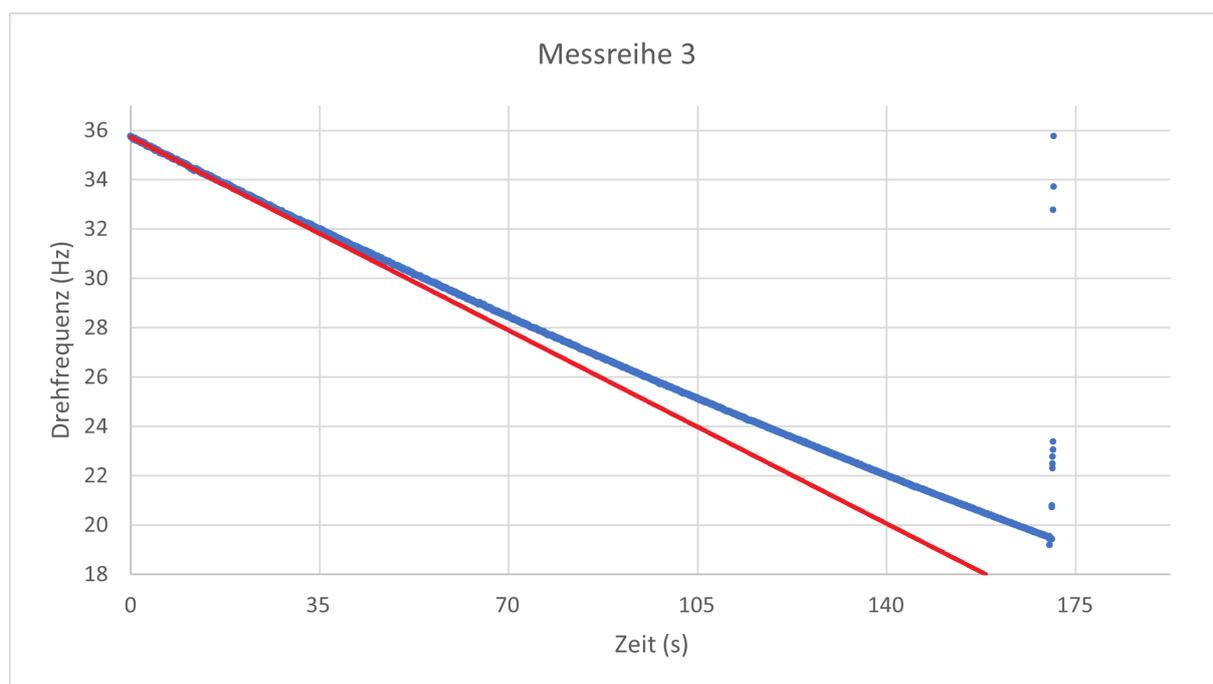


Abbildung 10: Die durchschnittliche Drehfrequenz f des Kreisels. Ausreisser der Messung wurden ausgesiebt. Die rote Hilfsgerade verdeutlicht die nicht lineare Abflachung der Drehfrequenz (blau).

4.7. Diskussion

Die nachfolgende Analyse bezieht sich hauptsächlich auf Abbildung 10. Die Abbildungen 28 und 29 dienen als Referenz (Anhang A).

Aus dieser Messung lässt sich schliessen, dass die Winkelgeschwindigkeit ω nicht konstant abnimmt. Je langsamer der Kreisel dreht, desto schwächer wird er abgebremst. Dies ist aufgrund dessen, dass die Arbeit W_L , welche der Luftwiderstand am Kreisel verrichtet, nicht proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω ist. Der Zusammenhang sieht wahrscheinlich so aus: $W_L \propto v^x$, $x > 1$. Genauer dazu kann nicht gesagt werden, da dies mit Reibungswiderständen in der Fluidodynamik zu tun hat und mit laminaren und turbulenten Strömungen. Als einfacher Alltagsvergleich ist das Beispiel des Autos zu nehmen. Beim Autofahren ist der Luftwiderstand proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit [7]. Somit ist ein ähnliches Verhalten beim Kreisel anzunehmen: am Anfang ist bei schneller Drehfrequenz der Luftwiderstand grösser, als bei langsamer Drehfrequenz.

Auffällig ist zudem, dass alle drei Messreihen bei ca. 20 Hz abbrechen und keine einordbare Winkelgeschwindigkeit mehr messen. Dies ist der Zeitpunkt, bei welchem der Kreisel aufhört zu schweben. Der Kreisel befindet sich dann nicht mehr vor dem Sensor und jede kleine Lichtänderung kann den Sensor beeinflussen. Somit gibt es eine minimale Drehfrequenz $f_{\min} = (20.0 \pm 0.5)$ Hz, respektive $\omega_{\min} = (126 \pm 3)$ rad/sec, bei der der Kreisel gerade noch schweben kann. In [4] werden minimale Winkelgeschwindigkeiten ω_{\min} von 114 rad/sec, 122 rad/sec und 129 rad/sec für verschiedene Levitrons angegeben.

5. Planung des Antriebs

5.1. Einleitung

Der Kreisel des Levitrons hört nach ca. 3 min auf zu schweben. Der Grund ist, dass der Kreisel zu diesem Zeitpunkt zu langsam um seine eigene Achse dreht. Wie bereits herausgefunden wurde, darf die Winkelgeschwindigkeit ω des Kreisels nicht unter (126 ± 3) rad/sec fallen, um das Schweben beizubehalten. Der Grund für den Geschwindigkeitsverlust ist auf den Luftwiderstand zurückzuführen. Vielleicht werden zusätzlich im Kreisel Ströme induziert, wodurch dieser warm wird und noch mehr Rotationsenergie verliert.

Es wurde überlegt, den Kreisel in einem Vakuum schweben zu lassen. Doch diese Idee wäre unhandlich für das Starten des Kreisels und ermöglicht auch nicht ewiges Schweben, sondern nur ein verlängertes. Deshalb lag die Entscheidung bei einem Antrieb, welcher den Kreisel auf einer konstanten Geschwindigkeit behält.

5.2. Skizze des Antriebs

Vereinfacht dargestellt besteht der Antrieb aus zwei strombetriebenen Drahtspulen, die seitlich des Levitrons aufgebaut werden. Diese Spulen sind mit einem Stativ auf einer Basisplatte befestigt. Der Basismagnet des Levitrons steht auf einem Sockel, damit der Kreisel im Zentrum der Spulen schwebt. Dadurch kann sichergestellt werden, dass das Magnetfeld der Spulen um den Kreisel herum nahezu homogen ist.

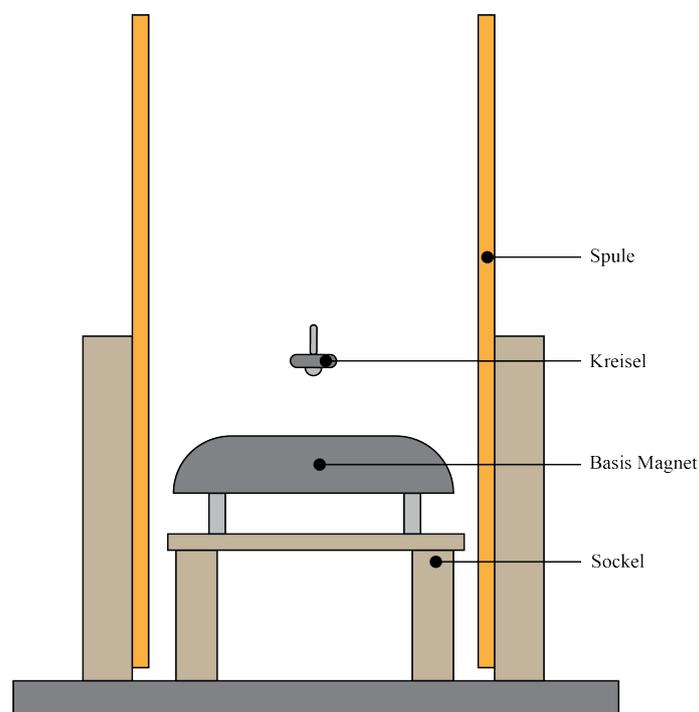


Abbildung 11: Der Levitron mit den Spulen des Antriebs. Der Kreisel schwebt in der Mitte der beiden Spulen.

5.3. Funktionsweise des Antriebs

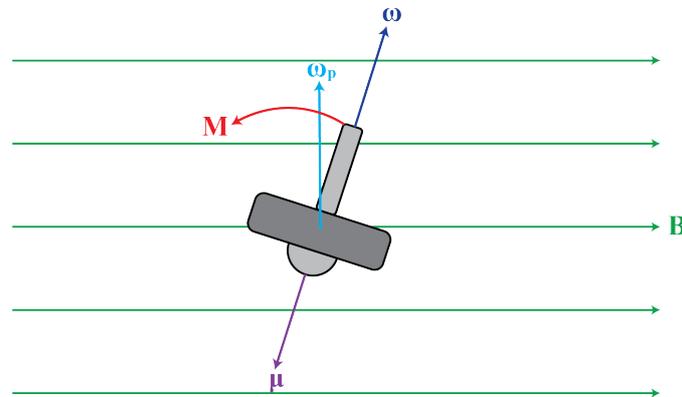


Abbildung 12: Kreisel im Magnetfeld \mathbf{B} der Helmholtz-Spulen. Es wirkt ein Drehmoment \mathbf{M} auf den Kreisel. Das Magnetfeld \mathbf{B}_0 des Basismagneten ist zur Übersichtlichkeit weggelassen.

Beim Antrieb handelt es sich um ein grosses Helmholtz-Spulen-Paar, welches mit einer Wechselspannung der Frequenz f_w gespeist ist. Somit wird ein alternierendes Magnetfeld \mathbf{B} erzeugt, welches senkrecht auf das Dipolmoment $\boldsymbol{\mu}$ des Kreiselns trifft. Ein Drehmoment \mathbf{M} wird dadurch auf den Kreisel ausgeübt $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ (siehe Abbildung 12). Somit wird der Kreisel in eine konstante Schwingung versetzt, welche die gleiche Frequenz hat wie die Wechselspannung f_w an den Spulen. Der Kreisel kippt dadurch konstant hin und her mit einer Frequenz ω_{kip} . Das Magnetfeld der Spulen verrichtet dem Kreisel Arbeit und die Kippfrequenz ω_{kip} pendelt sich ein, bis sie gleich der Frequenz der Wechselspannung ist $\omega_{\text{kip}} = 2\pi f_w$.

Um also den Kreisel bei einer Winkelgeschwindigkeit ω schweben zu lassen, muss lediglich die passende Kippfrequenz ω_{kip} gefunden werden.

5.4. Dimensionen des Antriebs

Damit die Materialien für die Spulen bestellt werden können, müssen zuerst die Dimensionen des Helmholtz-Spulen-Paares abgeschätzt werden. Zudem muss herausgefunden werden, wie viel Strom die Spulen brauchen, um ein genügend starkes Magnetfeld zu generieren. Als Ansatz diente [8]. Dort wurde bereits ein solcher Antrieb gebaut. Sie verwendeten 2 Spulen mit je 154 Windungen und mit einem Durchmesser von 40 cm. Diese wurden mit 0.28 A versorgt, bei einer Frequenz von 39.6 Hz. Die Stärke des Magnetfeldes B der Spulen ist als 0.14 mT angegeben. In [8] wurde der «Perpetuator», ein auf dem Markt erhältlicher Antrieb für den Levitron, als Referenz verwendet. Dieser hat eine Magnetfeldstärke von 0.12 mT. Dies diente als sehr gute Hilfsgrößen.

Um die Spulendimensionen selbst zu berechnen, wurde eine Gleichung aus Grundformeln aufgestellt. Der Kreisel wird langsamer, weil die Luft Arbeit W am Kreisel verrichtet. Der Antrieb muss also diese Arbeit ausgleichen. Somit kann über die Arbeit W der Luft auf die Stärke des nötigen Magnetfeldes der Spulen geschlossen werden und somit auf die

nötigen Spulendimensionen. Die Grundformel aus dem Formelbuch [3] für die Arbeit W ist:

$$W = M\varphi. \quad (12)$$

Die verrichtete Arbeit W ist gleich dem Drehmoment M und dem Auslenkungswinkel φ . Durch Einsetzen von $M = \mu \times B$ wird

$$W = (\mu \times B)\varphi = \mu B\varphi \sin(\alpha) \quad (13)$$

erhalten. Der Winkel α ist hier ungefähr 90° , da der Kreisel nur sehr wenig ausgelenkt wird. Jedoch ist die Auslenkung nicht konstant, sondern ändert sich (wegen der Kippbewegung) ständig. Zur Vereinfachung wird der Winkel α als 90° festgelegt. Dafür wird ein zusätzlicher Fehler von 10 % in der Fehlerrechnung berücksichtigt. Das benötigte Magnetfeld B

$$B = \frac{W}{\mu\varphi} \quad (14)$$

entspricht somit der Arbeit W , welche die Luft dem Kreisel während einer Kippbewegung verrichtet, durch das Dipolmoment μ und den Winkel φ , um den der Kreisel ausgelenkt wird. Diese Gleichung kann zu der Leistung P der Luft und der Kippfrequenz ω_{kipp} des Kreisels umgeformt werden:

$$B = \frac{P}{\mu\varphi\omega_{\text{kipp}}}. \quad (15)$$

Die Leistung P ist gegeben durch die Rotationsenergieänderung ΔE des Kreisels durch die verstrichene Zeit t

$$P = \frac{\Delta E}{t} \quad (16)$$

Die Rotationsenergie ist $E = \frac{1}{2}J\omega^2$. Deshalb können zur Berechnung der Leistung P zwei Geschwindigkeitspunkte in der Messung der Winkelgeschwindigkeit genommen werden und die verstrichene Zeit. Etwas schwieriger ist es mit dem Trägheitsmoment, da dafür noch keine Messungen gemacht wurden.

Das Problem beim Bestimmen des Trägheitsmoments J ist, dass es nicht immer gleich gross ist. Bei jedem neuen Flug muss das Gewicht des Kreisels neu eingestellt werden, damit dieser stabil schwebt. Das heisst, es müssen Gewichtsringe entfernt oder hinzugefügt werden. Der Bereich, in dem das Gewicht des Kreisels verstellt wird, befindet sich bei ca. 0.2 g, was hier einen vernachlässigbar kleinen Einfluss auf das ganze Trägheitsmoment hat. Das Trägheitsmoment J eines Hohlzylinders mit der Achse durch den Schwerpunkt ist

$$J = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2). \quad (17)$$

Messungen des Gewichts m jedes Gewichtsrings und des Kreisels ohne Ringe sowie der Aussenradien r_1 und Innen-Radien r_2 der Gewichtsringe müssen durchgeführt werden. Das Gewicht wird mit der Präzisionswaage der Schule bestimmt, welche auf 0.01 g genau ist. Für die Radien wird eine Schublehre mit Genauigkeit 0.1 mm verwendet. Das Trägheitsmoment J wird von der am häufigsten verwendeten Kreisel-Gewichtsrings-Konstellation berechnet. Das Trägheitsmoment beträgt $J = (2.2 \pm 0.1) \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$.

Durch Einsetzen wird für die Leistung $P = (2.2 \pm 0.3) \times 10^{-4} \text{ W}$ erhalten.

Der Wert des Dipolmoments μ wird von der Quelle [4] genommen, da das Messen des Dipolmoments zu schwierig und zeitaufwändig wäre. Es müsste nämlich eine eigene Messapparatur nur für diese Messung gebaut werden. Es ist aber anzunehmen, dass alle Kreisel auf dem Markt etwa ähnlich sind. Zudem sind alle anderen Grössen in der Quelle sehr ähnlich zum hier verwendeten Levitron. Dies ergibt somit ein Dipolmoment $\mu = (0.65 \pm 0.05) \text{ A m}^2$.

Der Auslenkungswinkel φ wird mit einem Video (960Fps) vom schwebenden Kreisel ohne Antrieb bestimmt. Hierzu wird das Handy Galaxy S10 verwendet. Der Winkel kann anhand des Videos gemessen werden. Der Auslenkungswinkel ist $\varphi = (4 \pm 1)^\circ = (0.070 \pm 0.007) \text{ rad}$.

Die Präzession ω_p ändert sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Die Kippfrequenz ω_{kipp} wurde mit einem Video (960Fps) und dem Zählen der Kippbewegungen in einer definierten Zeitspanne abgeschätzt. Es gibt einen sehr grossen Bereich, in dem der Kreisel stabil schwebt. Deshalb wurde die Kippfrequenz auf $\omega_{\text{kipp}} = 40 \text{ Hz}$ festgesetzt. Diese Grösse hat keinen Fehler, denn mit dem Antrieb will diese ja erreicht werden. Es ist somit eine Zielgrösse.

Nach Einsetzen aller Grössen in die Formel (15) ergibt sich das Magnetfeld $B = (0.12 \pm 0.03) \text{ mT}$, welches die Spulen erzeugen müssen, um den Kreisel antreiben zu können. Dies stimmt sehr gut mit der erwarteten Grösse überein. Die Dimensionen der Spulen ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\mu_0 N I}{r}. \quad (18)$$

Die Dimensionen der Spulen wurden folgendermassen gewählt. Jede Spule erhält 100 Wicklungen N und der Abstand und Radius r der Spulen betragen je 20 cm. Betrieben werden die Spulen voraussichtlich mit $(0.27 \pm 0.06) \text{ A}$. Der Draht muss jedoch für mehr ausgelegt sein, falls mehr Strom I benötigt wird.

6. Bau des Antriebs

6.1. Materialbeschaffung

Als Basis dient der Levitron Ultimate der Marke Fascinations. Für die Spulen wurde eine Rolle Draht gekauft (BLOCK, CUL 500/0.40). Der Draht ist für 0.45 A spezifiziert, was über der voraussichtlichen Stromstärke liegt [9]. Der Draht ist lackisoliert. Für den Sockel des Levitrons und die Stative für die Spulen wurde Holz gewählt, da Holz keine ferromagnetische Eigenschaften hat. Aus gleichem Grund werden keine Schrauben, sondern Holzdübel und Leim verwendet. Um die Spulen an den Frequenzgenerator anschliessen zu können, werden Bananenstecker mit Winkeleisen (aus Plastik) an den Stativseiten angebracht.

6.2. Bau

Es wird nun auf den Bau der Spulen eingegangen. Die Spulen bestehen aus 8 Speichen aus Holz, um welche der Draht gewickelt wird. Die Speichen besitzen am äusseren Ende eine Kerbe, welche herausgefräst wurde, um ein Herunterrutschen des Drahtes zu vermeiden. Die Spulen ähneln mehr einem 8-Eck als einem Kreis. Dies ist ein systematischer Fehler, da nur mit einem runden Spulenpaar ein homogenes Magnetfeld erzeugt wird. Diese Abweichung hat jedoch einen vernachlässigbaren Einfluss auf das Magnetfeld im Zentrum der Spulen. Auch dass die Spulen nicht perfekt parallel zueinander stehen, hat nur einen kleinen Einfluss. Bilder zum Bau des Antriebs sind in Anhang B zu finden.

7. Testen des Antriebs

Ein Frequenzgenerator wird von der Schule ausgeliehen, um die Wechselspannung für die Spulen bereitzustellen. Die Spulen werden parallel geschaltet, da die benötigte Spannung bei einer Serieschaltung die maximale Spannung des Frequenzgenerators übersteigt. Der Strom I_{total} des Frequenzgenerators wird mit einem Amperemeter gemessen (siehe Abbildung 13).

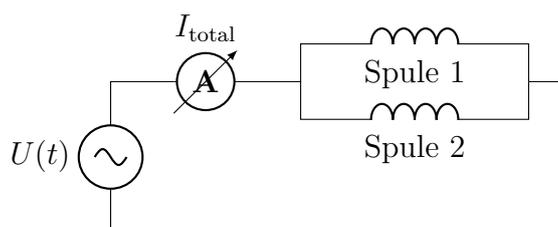


Abbildung 13: Schaltkreis des Antriebs. Zwei Spulen sind parallel an einen Frequenzgenerator geschaltet.

Wie bereits berechnet wurde, muss durch jede Spule mindestens (0.27 ± 0.06) A fließen. Das stabile Schweben bei konstanter Geschwindigkeit des Kreisels ist ab ca. 0.3 A erfolgreich. Dies entspricht auch der vorausgesagten Stromstärke. Ein oberes Limit wird nicht bestimmt, da das Überschreiten des maximal zugelassenen Stromes des Drahtes von 0.45 A vermieden werden sollte. Der Frequenzgenerator wird auf eine Sinus-Funktion eingestellt, mit der Frequenz 40 Hz. In der Quelle [8] wurde ein Antrieb bereits getestet und dieser funktionierte bei dieser Frequenz. Ein systematischer Fehler ist, dass der Widerstand R der beiden Spulen in der Praxis nicht exakt gleich ist. Dadurch könnte durch eine Spule etwas mehr Strom fließen als durch die andere. Der Widerstand der Spulen wird nachgemessen und er stimmt auf 0.6 % überein. Dieser Fehler ist somit vernachlässigbar.

Der Kiesel lässt sich starten, während der Antrieb läuft. Zuerst schwebt der Kiesel normal wie ohne Antrieb, doch nach ca. 30 s wird der Kiesel viel ruhiger und stabiler. Der Kiesel bewegt sich in der Luft nicht umher, sondern bleibt an Ort und Stelle genau im Zentrum über der Basis. Ein Klappergeräusch ist zu hören. Dies kommt vermutlich von den Gewichtsrings des Kreisels, welche ein bisschen Spielraum haben. Die Kippfrequenz ω_{kip} hat ihren konstanten Zustand erreicht. Der Kiesel verlangsamt sich auch nicht mehr und fällt nicht herunter, sondern schwebt mit einer konstanten Geschwindigkeit.

Der Kreisel wird über 5 Stunden laufen gelassen. Danach wurde der Versuch abgebrochen, da sich nichts verändert hatte. Es ist gezeigt, dass der Antrieb funktioniert, denn ohne Antrieb sind maximal 3 min Schwebezeit möglich. Es kann somit gesagt werden, dass der Kreisel mit Antrieb ewig schweben kann, wenn das System nicht von aussen gestört wird.

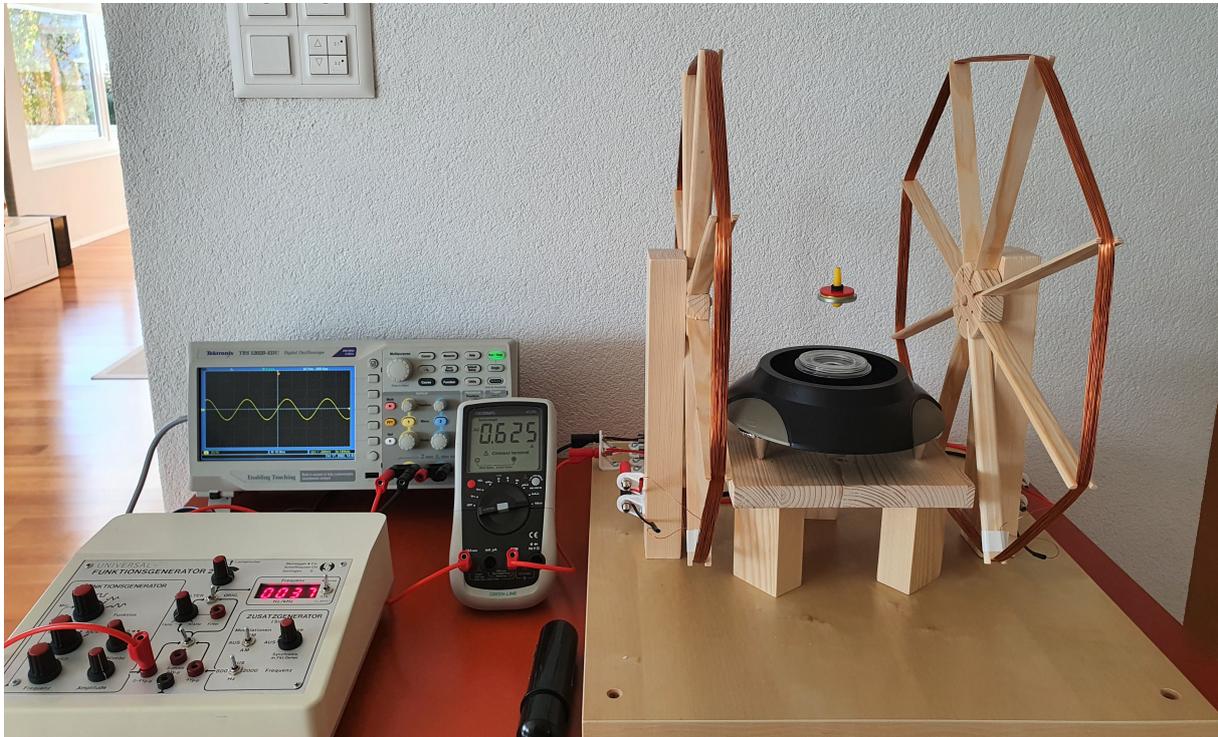


Abbildung 14: Der Versuchsaufbau beim Testen des Antriebs.

8. Präzession des Kreisels

8.1. Einleitung

Die Winkelgeschwindigkeit ω und die Kippfrequenz ω_{kipp} sind voneinander abhängig. Sonst würde der Antrieb nicht funktionieren. Der genaue Zusammenhang wird deshalb erforscht. Es wird ein Experiment durchgeführt, um den Zusammenhang herauszufinden.

8.2. Experiment

Im Experiment werden zwei Größen gemessen: die Drehfrequenz f und eine zweite Frequenz, die Kippfrequenz f_{kipp} , welche die Kippbewegung des Kreisels ist: $\omega_{\text{kipp}} = 2\pi f_{\text{kipp}}$.

Es werden zwei Messungen gemacht. Bei der ersten Messung wird der Kreisel zum Schweben gebracht. Der Antrieb ist ausgeschaltet. Dann wird ca. alle 12 s ein Video (960Fps) vom Kreisel gemacht. Eine Stoppuhr im Hintergrund des Kreisels zeigt die Zeit in Hundertstel Sekunde an. Dies wird für die Auswertung gebraucht. Es wird gestoppt, sobald der Kreisel herunterfällt.

Bei der zweiten Messung wird wie bei der ersten Messung der Kreisel zum Schweben gebracht. Nun ist jedoch der Antrieb eingeschaltet. Die Frequenz des Antriebs wird jeweils

um 5 Hz erhöht. Es wird gewartet, bis der Kreisel fertig beschleunigt hat. Anschliessend wird ein Video gemacht. Dies wird wiederholt, bis der Kreisel herunterfällt. Dasselbe wird nochmals mit unteren Frequenzen durchgeführt. Das heisst, der Antrieb wird jeweils um 5 Hz verringert und es wird ein Video gemacht, bis der Kreisel herunterfällt.

Zusätzlich wird auch noch eine andere Messmethode ausprobiert. Dies dient der Bestätigung der Messmethode mit den Videos, denn die Resultate sollten sich nicht unterscheiden, wenn eine andere Messmethode verwendet wird. Diese andere Messmethode funktioniert nur, wenn der Kreisel ohne Antrieb schwebt. Die Spulen werden dabei zum Messinstrument umfunktioniert. An den Spulen wird ein Oszilloskop angehängt. Auf diesem kann die Kippfrequenz f_{kipp} abgelesen werden als die Periode der angezeigten Funktion auf dem Oszilloskop. Dies funktioniert, weil der Kreisel selbst magnetisch ist. Wenn der Kreisel nun die Richtung seines Dipolmoments μ zur Spule ändert, ändert sich auch der magnetische Fluss Φ_m und es werden Induktionsspannungen U_{ind} in den Spulen induziert $U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$. Die Spulen funktionieren hier wie eine Antenne.

8.3. Auswertung

Die Videos werden einzeln ausgewertet. Jedes Video wird zweimal angeschaut. Einmal, um die Drehfrequenz f des Kreisels zu bestimmen, das andere Mal, um die Kippfrequenz f_{kipp} zu bestimmen. Jedes Video hat einen Zeitabschnitt von 0.8s aufgenommen. Für eine genauere Messung werden die Anzahl Umdrehungen respektive die Anzahl Kippbewegungen im Video gezählt. Anschliessend wird die Zeitdauer in Hundertstel Sekunden notiert, welche auf der Stoppuhr im Hintergrund des Videos abgelesen wird. Die durchschnittliche Drehfrequenz f und Kippgeschwindigkeit f_{kipp} können dadurch berechnet werden. Ein Problem ist, dass der Bildschirm der Stoppuhr nur alle 50 ms aktualisiert. Somit ist der Messfehler auch relativ gross.

f	f_{kipp}
(21 ± 3) Hz	(20 ± 3) Hz
(21 ± 3) Hz	(22 ± 3) Hz
(21 ± 3) Hz	(22 ± 3) Hz
(23 ± 3) Hz	(23 ± 4) Hz
(23 ± 3) Hz	(22 ± 4) Hz
(23 ± 3) Hz	(23 ± 4) Hz
(28 ± 4) Hz	(25 ± 4) Hz
(28 ± 4) Hz	(25 ± 4) Hz
(28 ± 4) Hz	(28 ± 5) Hz
(28 ± 4) Hz	(30 ± 5) Hz
(30 ± 4) Hz	(30 ± 5) Hz
(33 ± 4) Hz	(31 ± 5) Hz
(32 ± 4) Hz	(33 ± 5) Hz
(34 ± 4) Hz	(33 ± 5) Hz
(36 ± 4) Hz	(36 ± 5) Hz

Tabelle 2: Messwerte der Drehfrequenz f und der dazugehörigen Kippfrequenz f_{kipp} . Die Messung wurde ohne Antrieb durchgeführt. Messwerte mit Videoanalyse bestimmt.

f	f_{kip}	Antrieb
(21 ± 3) Hz	(24 ± 3) Hz	(25 ± 1) Hz
(21 ± 3) Hz	(25 ± 3) Hz	(26 ± 1) Hz
(24 ± 3) Hz	(29 ± 3) Hz	(30 ± 1) Hz
(26 ± 4) Hz	(36 ± 3) Hz	(35 ± 1) Hz
(29 ± 4) Hz	(38 ± 4) Hz	(40 ± 1) Hz
(30 ± 4) Hz	(44 ± 4) Hz	(45 ± 1) Hz
(30 ± 4) Hz	-	(50 ± 1) Hz
(33 ± 4) Hz	-	(55 ± 1) Hz
(34 ± 4) Hz	-	(60 ± 1) Hz
(38 ± 5) Hz	-	(65 ± 1) Hz
(42 ± 5) Hz	-	(70 ± 1) Hz
(48 ± 5) Hz	-	(75 ± 1) Hz

Tabelle 3: Messwerte der Frequenzen f , f_{kip} und gewählte Frequenz des Antriebs. Die Messung wurde mit aktivem Antrieb durchgeführt. Messung von f_{kip} nur bis zu einer gewissen Geschwindigkeit möglich.

Beim Auswerten der Videos konnten f_{kip} grösser als 44 Hz nicht bestimmt werden. Dies ist aufgrund dessen, dass der Auslenkungswinkel des Kreisels zu klein wird und somit die Kippbewegung nicht mehr erkennbar ist. Jedoch werden so hohe Frequenzen nur im Falle «Kreisel mit Antrieb» erreicht. Dies ist deshalb nicht weiter relevant, da die Frequenz f_{kip} und die Frequenz des Antriebs immer übereinstimmen. Dies ist nämlich das Grundprinzip, wie der Antrieb überhaupt funktioniert. In Tabelle 3 ist die Übereinstimmung gut erkennbar. Durch diese Messung kann auch die maximale Drehfrequenz f_{max} des Kreisels bestimmt werden, da bei (48 ± 5) Hz der Kreisel herunterfiel. Dies deckt sich mit den Vergleichsgrössen der Quelle [4].

f	f_{kip}
(20 ± 3) Hz	(20 ± 2) Hz
(23 ± 3) Hz	(21 ± 2) Hz
(26 ± 3) Hz	(23 ± 2) Hz
(29 ± 4) Hz	(27 ± 3) Hz
(32 ± 4) Hz	(29 ± 3) Hz
(35 ± 4) Hz	(31 ± 3) Hz

Tabelle 4: Messwerte der Drehfrequenz f und die dazugehörige Kippfrequenz f_{kip} . Bei dieser Messung wurde f_{kip} mit einem Oszilloskop gemessen.

Anzumerken ist, dass beim Messen mit dem Oszilloskop die Zimmerlampe ausgeschaltet wurde. Dies verringerte das Rauschen des Signals um ein Vielfaches. Jedoch gibt es immer noch Rauschen durch andere Störsignale, siehe Abbildung 15.

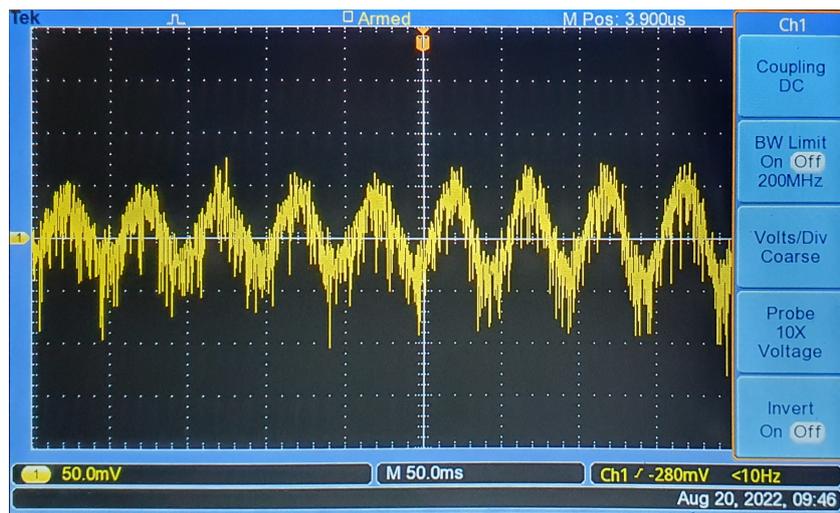


Abbildung 15: Messung der Induktionsspannung, die der Kreisel den Spulen induziert, mithilfe eines Oszilloskops. Die Periodendauer ist gleich der Kippfrequenz f_{kipp} .

8.4. Diskussion

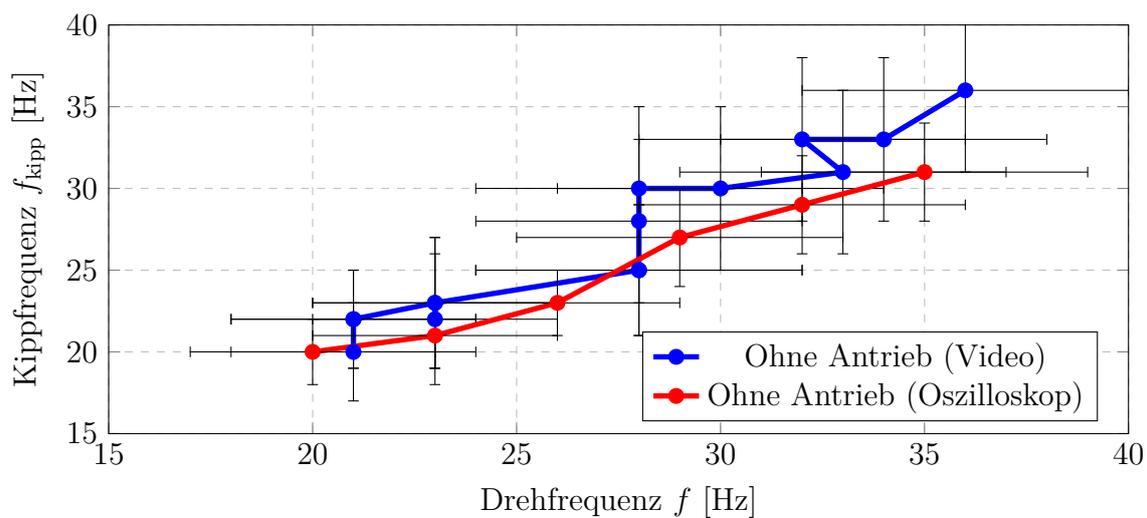


Abbildung 16: Verhältnis der Drehfrequenz f und Kippfrequenz f_{kipp} . Die Messung mithilfe der Videoanalyse und der Oszilloskop-Methode stimmen überein. Dies bestätigt, dass die Kippfrequenz gemessen wird und nicht etwas anderes.

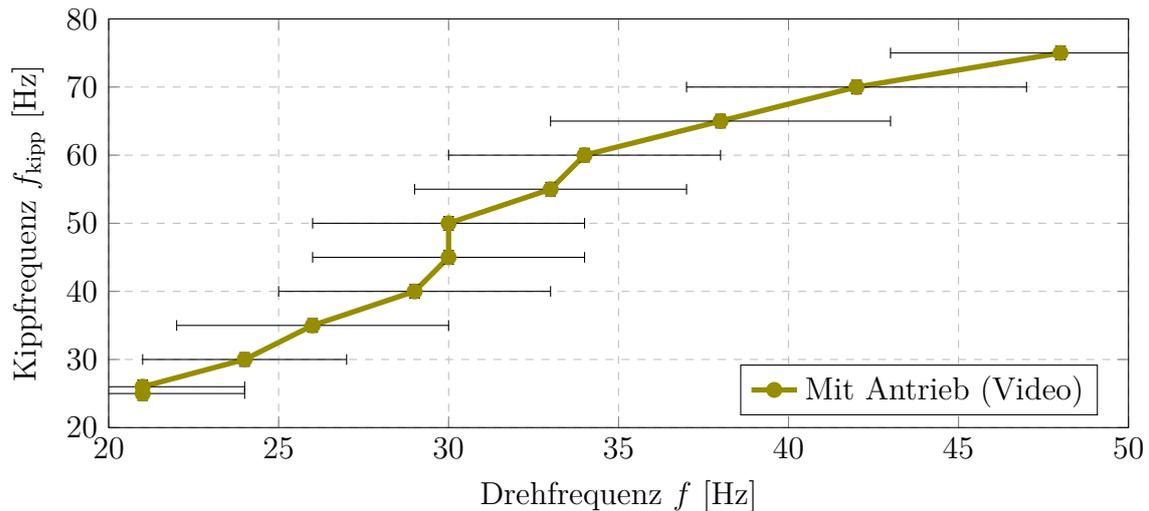


Abbildung 17: Verhältnis der Drehfrequenz f und Kippfrequenz f_{kipp} . Mit Antrieb verhält sich der Kreisel ähnlich wie ohne Antrieb.

Bei der Analyse der Graphen 16 und 17 wird ersichtlich, dass die Kippfrequenz $f_{\text{kipp}} = Cf$ proportional zur Drehfrequenz f ist, mit einer Konstanten C . Diese Konstante C scheint im Falle mit und ohne Antrieb nicht gleich zu sein. Dies lässt sich dadurch erklären, dass der Kreisel viel stabiler schwebt, wenn der Antrieb eingeschaltet ist. Ohne Antrieb tanzt der Kreisel auf seiner Schwebhöhe in jede Richtung um ca. 1 cm. Wenn der Antrieb läuft, befindet sich der Kreisel immer am gleichen Ort und schwebt um ein Vielfaches ruhiger.

Jedoch wurden diese Ergebnisse nicht erwartet. Eigentlich wurde ein Verhältnis erwartet, das umgekehrt proportional ist von $\omega \propto \frac{1}{\omega_{\text{kipp}}}$. Denn es wurde angenommen, dass die Kippfrequenz die Präzession ist. Ferner wird in der Quelle [4] das Verhältnis von ω und ω_p folgendermassen ausgedrückt:

$$\omega_p = -\frac{\mu \mathbf{B}_0}{I\omega}. \quad (19)$$

Im Kapitel 8.6 wird deshalb erklärt, wie die gemessene Kippfrequenz f_{kipp} einzuordnen ist.

8.5. Präzession und Nutation

Dieses Kapitel ist ein kurzer Theorieeinschub zur Erklärung, was der Unterschied zwischen Präzession und Nutation ist. Die Präzession ist die Richtungsänderung der Rotationsachse des Kreisels. Dies bedeutet, dass die Rotationsachse des Kreisels mit einem gewissen Winkel um eine Präzessionsachse dreht. Die Nutation ist die Richtungsänderung der Präzessionsachse. Dadurch dreht die Präzessionsachse in einem gewissen Winkel um die Nutationsachse. Die Rotationsachse macht aufgrund der Nutation eine Nickbewegung. Die Kombination der Präzession und Nutation ist in der Abbildung 18 gezeigt, in drei verschiedenen Verhältnissen von der Präzession und Nutation. Die Rotationsachse bewegt sich auf einer Kugeloberfläche in Form eines Locus.

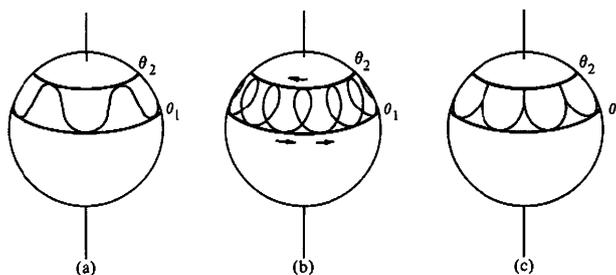


Abbildung 18: Abbildung aus dem Buch [5] S.186 Abb.5-7. Es zeigt die möglichen Gestalten des Locus der Figurenachsens auf der Einheitskugel.

8.6. Thesen

Es werden zwei Thesen aufgestellt, um die Messresultate zu erklären und um den Zusammenhang zwischen ω und ω_{kipp} und die Rolle der Präzession ω_p zu verstehen.

Die erste These ist, dass es sich um einen freien Kreisel handelt. Das bedeutet, dass der Kreisel, wenn er schwebt, sich in einem Drehmoment-freien Zustand befindet [10]. In diesem Falle wäre $\omega \propto \omega_p$. Wenn der Kreisel jedoch perfekt symmetrisch ist, also alle Trägheitsmomente J , J_p gleich wären, gäbe es eine solche Präzession nicht. Im Buch [5] S. 179 (5-40) wird der Zusammenhang wie folgt ausgedrückt:

$$\omega_p = \frac{J_p - J}{J_p} \omega. \quad (20)$$

In der zweiten These wird angenommen, dass es sich um keinen freien Kreisel handelt, also dass ein Drehmoment auf den Kreisel wirkt. In diesem Fall ist die Präzession des Kreisels $\omega \propto \frac{1}{\omega_p}$, wie in Formel (19) gezeigt wird. Es könnte in diesem Fall jedoch sein, dass die Kippfrequenz nicht, wie zuerst vermutet wurde, die Präzession ist. Denn, wenn ein Kreisel ein Drehmoment spürt, präzidiert der Kreisel nicht nur, sondern es gibt auch eine Nutation. Somit wurde vielleicht anstatt der Präzession die Nutation gemessen. Im Buch [5] S.189 (5-65) wird die Nutationsfrequenz ω_n beschrieben als:

$$\omega_n = \frac{J}{J_p} \omega. \quad (21)$$

Um zu entscheiden, welche der beiden Thesen am ehesten zutrifft, müssen nur die Trägheitsmomente eingesetzt werden. Das Trägheitsmoment $J = (2.2 \pm 0.1) \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$ wurde schon berechnet. Das Trägheitsmoment J_p steht senkrecht zu J . Es wird wie folgt berechnet: $J_p = m(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12})$. Dies gibt für das Trägheitsmoment $J_p = (1.2 \pm 0.1) \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$.

Um zu entscheiden, welche These stimmen könnte, wird in die Formeln (20) und (21) eingesetzt. Dies führt im Falle des freien Kreisels zu: $\omega_p = (-0.8 \pm 0.2)\omega$. Und für den Fall, dass ein Drehmoment auf den Kreisel wirkt, ergibt sich: $\omega_n = (1.8 \pm 0.2)\omega$. Das Vorzeichen spielt keine Rolle, da aus der Videoanalyse nicht ersichtlich ist, in welche Richtung die Kippfrequenz dreht. Zur Veranschaulichung werden $\omega_p = 1 * \omega$ (grün) und $\omega_n = 1.6 * \omega$ (orange) in den Abbildungen 19 und 20 geplottet.

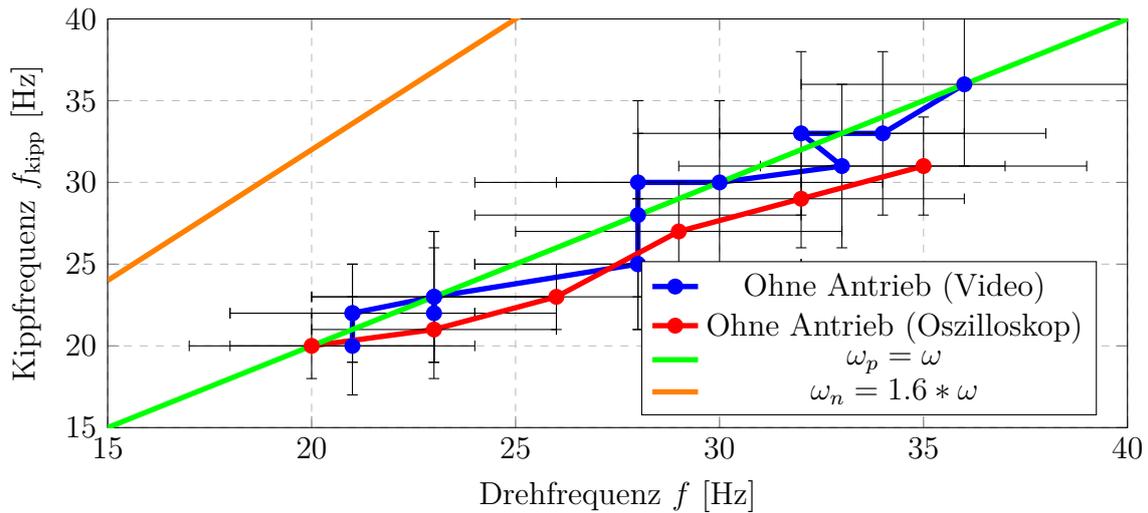


Abbildung 19: Gemessene Kippfrequenz f_{kipp} im Vergleich zur berechneten Nutationsfrequenz ω_n und zur berechneten Präzession ω_p . Wenn der Antrieb ausgeschaltet ist, scheint es sich bei der Kippfrequenz um die Präzession zu handeln. Jedoch wird geglaubt, dass die Bewegung des Kreisels viel komplizierter ist und somit wird keine Aussage getroffen.

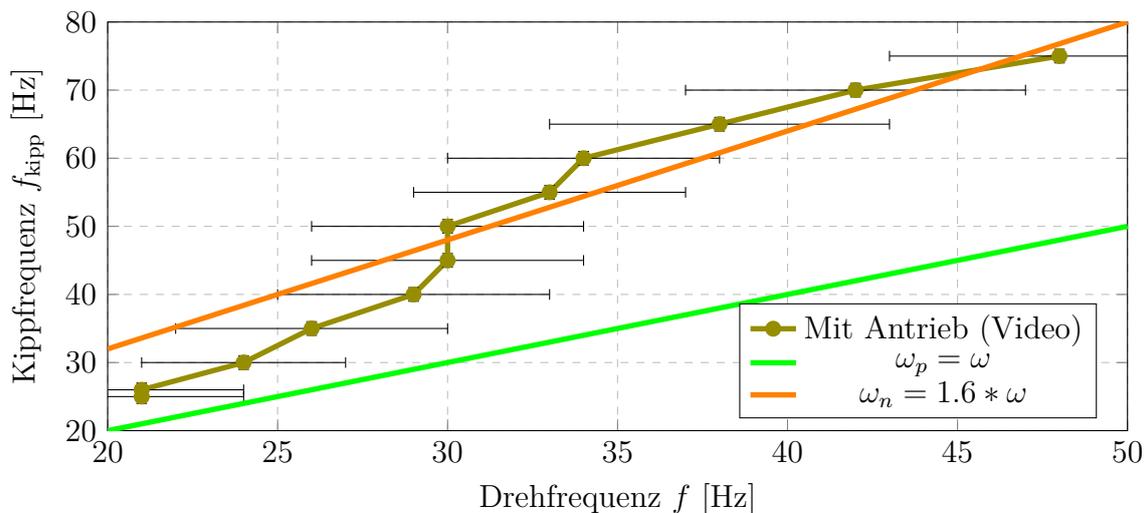


Abbildung 20: Gemessene Kippfrequenz f_{kipp} im Vergleich zur berechneten Nutationsfrequenz ω_n und zur berechneten Präzession ω_p des Kreisels. Wenn der Antrieb angeschaltet ist, scheint die beobachtete Kippfrequenz die Nutation zu sein.

Der Fall des freien Kreisels stimmt sehr gut mit dem Gemessenen «ohne Antrieb» überein. Der Fall mit dem nicht freien Kreisel stimmt hingegen sehr gut mit dem Gemessenen «mit Antrieb» überein.

Daraus kann gefolgert werden, dass bei den Messungen im Falle «mit Antrieb» nicht die Präzession, sondern die Nutationsfrequenz gemessen wurde. In diesem Fall handelt es sich bei der gemessenen Kippfrequenz um die Nutationsfrequenz. Dies macht auch theoretisch Sinn, da der Kreisel sicher nicht frei schwebt, wenn der Antrieb eingeschaltet ist. Denn

dieser übt gerade ein Drehmoment auf den Kreisel aus. Dies bedeutet, dass der Antrieb dank der Nutation des Kreisels funktioniert.

Im Falle des Kreisels «ohne Antrieb» ist es unklar, ob es sich um einen freien Kreisel oder um keinen freien Kreisel handelt. Auch wenn es bei der Analyse des Graphs 19 so scheint, als handle es sich um einen Kreisel, welcher frei ist, kann nicht mit voller Überzeugung das Schweben als frei bezeichnet werden. Denn das Schweben des Kreisels «ohne Antrieb» ist viel unruhiger und somit auch viel komplexer. Mit genaueren Messungen könnte eine Aussage getroffen werden.

9. Diskussion und Ausblick

Alle Ziele, welche am Anfang gesetzt wurden, sind erreicht worden. Der Levitron ist im Grundsatz theoretisch verstanden, soweit er gemäss Literatur zu verstehen ist. Verschiedene Einflussgrössen wurden gemessen, was wiederum half, den Antrieb zu dimensionieren und zu bauen. Der Antrieb funktioniert besser als erhofft, denn es ist ewiges Schweben möglich, solange es nicht zu grosse Einflüsse von aussen auf das System gibt.

Die Frage der Nutation und Präzession müsste noch weiter erforscht werden. Vor allem der Fall «ohne Antrieb». Es gibt noch viele offene Fragen um dieses Thema. Die Theorie des Schwebeprozesses könnte auch noch detaillierter behandelt werden und würde so vielleicht die Antwort auf die Frage liefern, ob es ein freier Kreisel ist, wenn kein Antrieb benützt wird.

10. Danksagungen

Ich danke herzlichst meinem Betreuer Herrn Dr. Helm, dass er so viel Zeit mit mir verbracht hat, um mit mir die Theorie zu erarbeiten und mir half, Literatur zu finden, welche den Levitron gut erklärt.

Vielen Dank auch an Herrn Gantert, Physiklaborant der Schule, der mir Messgeräte zur Verfügung stellte.

Ich danke auch den Autoren des Paper [4], da dieses eine sehr grosse Hilfe war und ich auf dem aufbauen konnte, was sie bereits behandelt haben.

Vielen Dank auch noch meinen Eltern, die meine Arbeit auf Rechtschreibfehler durchgesehen haben.

11. Literaturverzeichnis

[1] <https://en.wikipedia.org/wiki/Levitron>, 30.08.2022

[2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Earnshaw-Theorem>, 12.09.2022

[3] DMK; DPK; DCK, «Formeln Tabellen Begriffe», 7.Auflage, Orell Füssli, Altusried-Krugzell, 2019

[4] Simon Martin D.; Heflinger Lee O.; Ridgway S.L.(1997), «Spin stabilized magnetic levitation», American Journal of Physics, **65**, 286-292

- [5] Herbert Goldstein, «Klassische Mechanik», 8. Auflage, AULA-Verlag, Wiesbaden, 1985
- [6] https://www.electronics-notes.com/articles/electronic_components/transistor/phototransistor-circuits-applications.php, 30.04.2022
- [7] <https://de.wikipedia.org/wiki/Fahrwiderstand>, 16.08.2022
- [8] Ucke Christian und Schlichting Hans Joachim (2014), «Und ewig dreht sich der Kreisel», Physik in unserer Zeit **46**, 284-286
(http://www.ucke.de/christian/physik/ftp/lectures/Ewiger_Kreisel.pdf, 24.04.2022)
- [9] https://www.block.eu/de_DE/produktvariante/cul-500040/, 30.08.2022
- [10] <https://de.wikipedia.org/wiki/Präzession>, 18.08.2022
- [11] Berry M. V., (1996), «The Levitron: an adiabatic trap for spins», Proc. R. Soc. Lond. **452**, 1207-1220

12. Einhalten rechtlicher Vorlagen

Ich habe die Arbeit selbstständig und unter Aufsicht meines Betreuers verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet.

Ich nehme zur Kenntnis, dass meine Arbeit zur Überprüfung der korrekten und vollständigen Angabe der Quellen mit Hilfe einer Software (eines Plagiaterkennungstools) geprüft wird. Zu meinem eigenen Schutz wird die Software auch dazu verwendet, später eingereichte Arbeiten mit meiner Arbeit elektronisch zu vergleichen und damit Abschriften und eine Verletzung meines Urheberrechts zu verhindern.

Falls Verdacht besteht, dass mein Urheberrecht verletzt wurde, erkläre ich mich damit einverstanden, dass die Schulleitung meine Arbeit zu Prüfzwecken herausgibt.

18. Oktober 2022

A. Anhang Drehfrequenzmesser

A.1. Arduino Programm

Das folgende Arduino Programm wird kodiert und auf den Arduino geladen. Es definiert einen Messeingang (Pin A0), eine Variable M für den Messwert und die Variable T für die Zeit. Das Programm ist eine Schleife, die sich wiederholt. Bei jeder Wiederholung wird die Spannung am Messeingang A0 gemessen und der Variablen M einen Wert von 0 bis 1023 zugewiesen. 0 steht für 0V und 1023 für 5V. Die Zeit in Millisekunden, die seit dem Einschalten des Arduino vergangen ist, wird der Variabel T zugewiesen. T und M werden auf dem Laptop in einem speziellen Monitorfenster angezeigt .

```
const int Messeingang = A0;
int M = 0; // Messwert
long int T = 0;

void setup() {

  Serial.begin(115200);

}

void loop() {

  M = analogRead(Messeingang);
  T = millis();
  Serial.print(T);
  Serial.print(", ");
  Serial.println(M);

}
```

Es ist darauf zu achten, dass die Baud-Rate gross genug ist. Hier ist sie auf 115200 bit/s eingestellt. Bei tieferen Einstellungen war die Messung zu langsam, da die Baud-Rate die Geschwindigkeit ist, mit der ein Bit zum Laptop übertragen wird. Da bei diesem Programm bei jeder Schleife etwa 10-12 Zeichen übertragen werden, was etwa 100-120 bit entspricht, ist somit das Messen der Spannung am Messeingang in Abständen von 1 ms möglich.

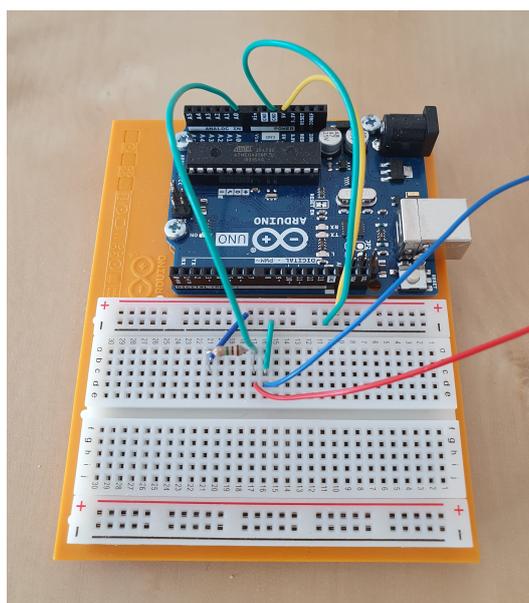


Abbildung 21: Der Arduino und wie er verkabelt wurde.

A.2. Abbildungen der weiteren Messreihen

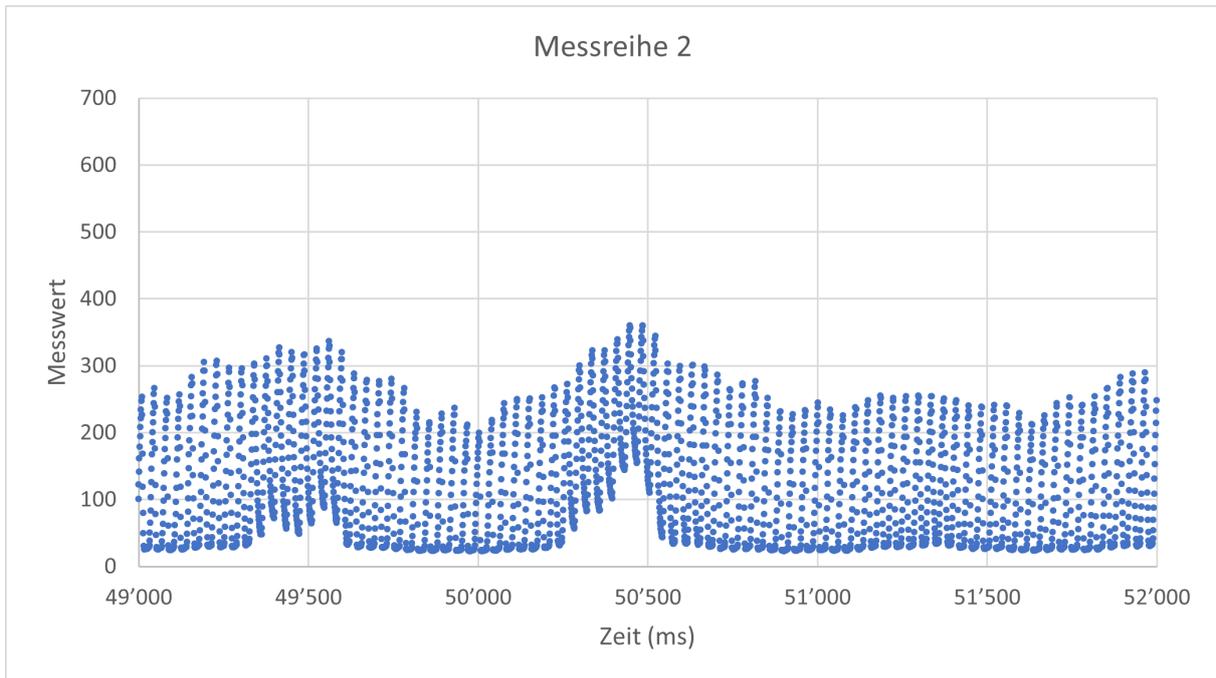


Abbildung 22: Messwerte in einem Intervall von 3s der Messreihe 2. Es sind Perioden von ca. 1 Hz zu erkennen. Diese sind jedoch sehr schlecht ausgeprägt.

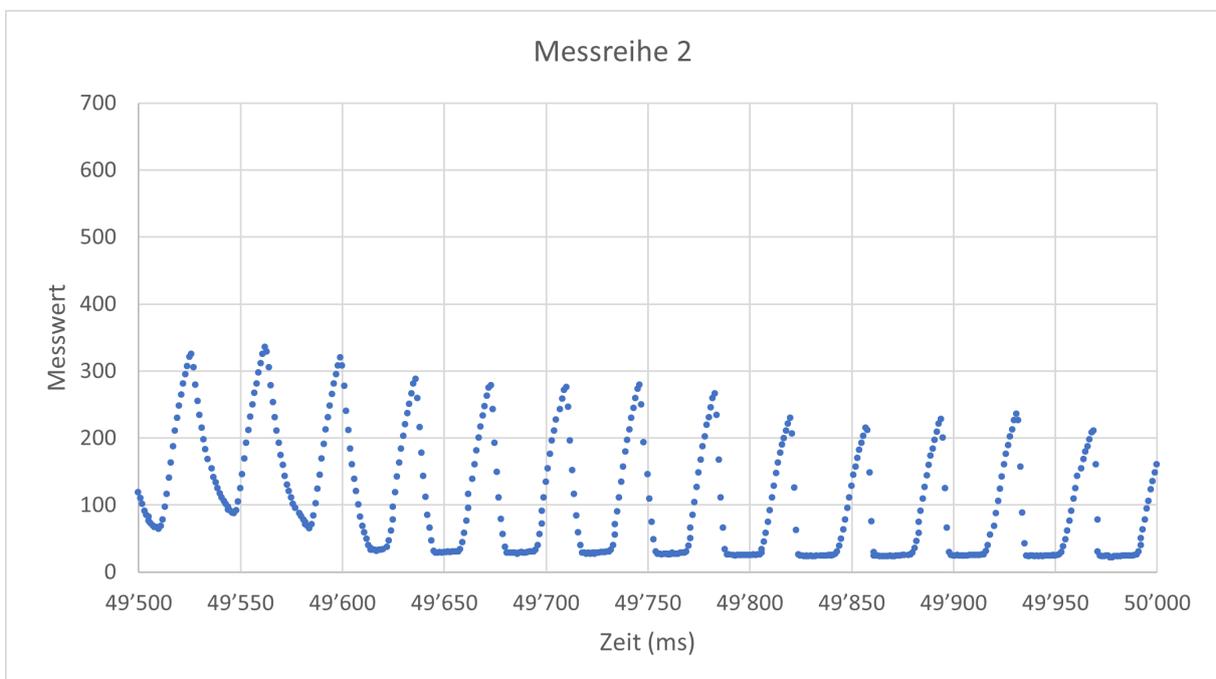


Abbildung 23: Messwerte eines 500 ms Ausschnittes des Intervalls gemäss Abbildung 22 der Messreihe 2. Es sind Perioden von ca. 30 Hz zu erkennen.

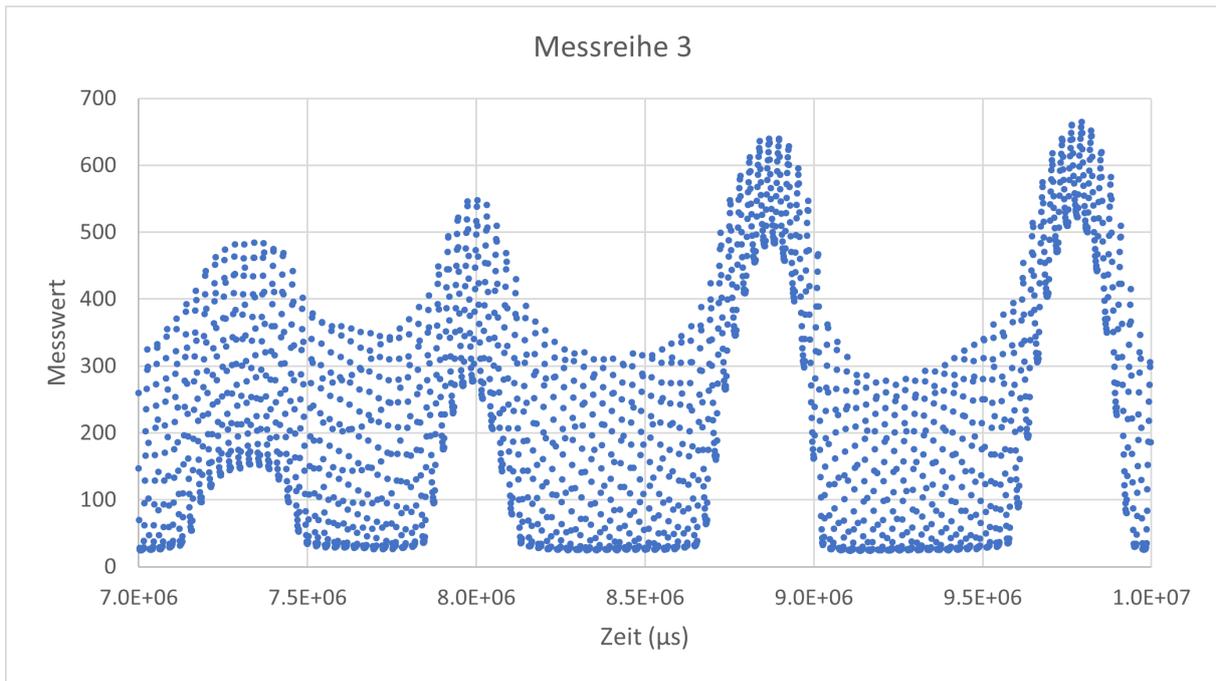


Abbildung 24: Messwerte in einem Intervall von 3s der Messreihe 3. Es sind unregelmässige Perioden von ca. 1 Hz wie in Messreihe 1 zu erkennen.

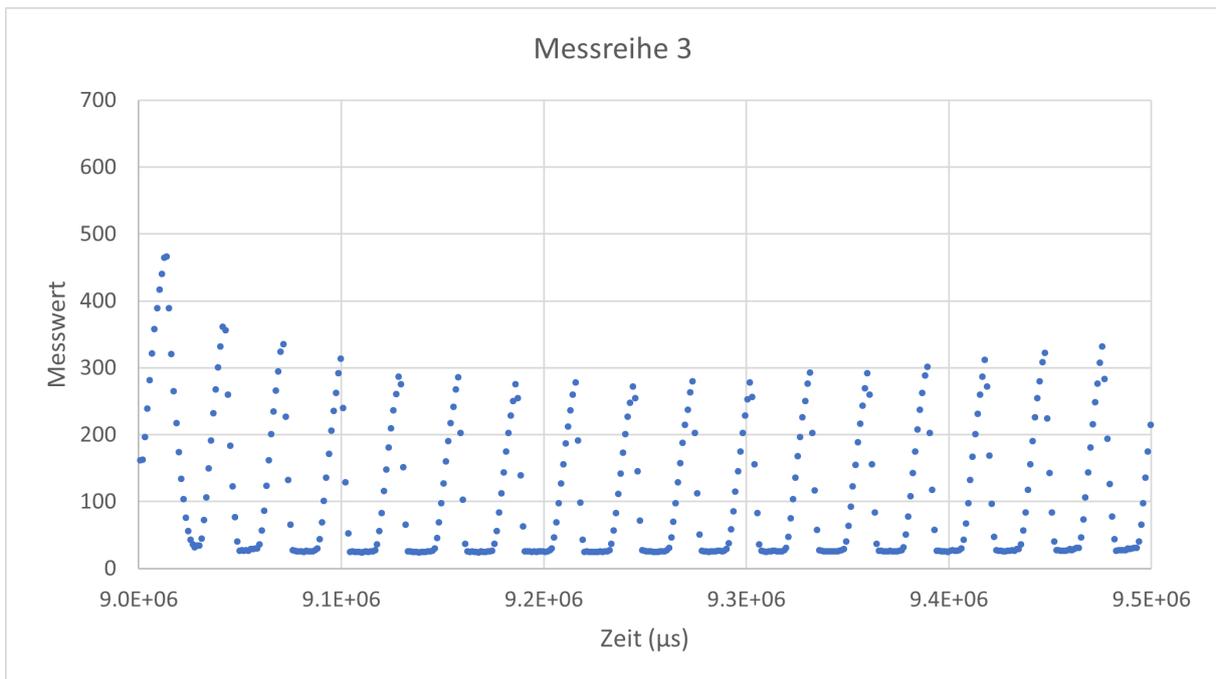
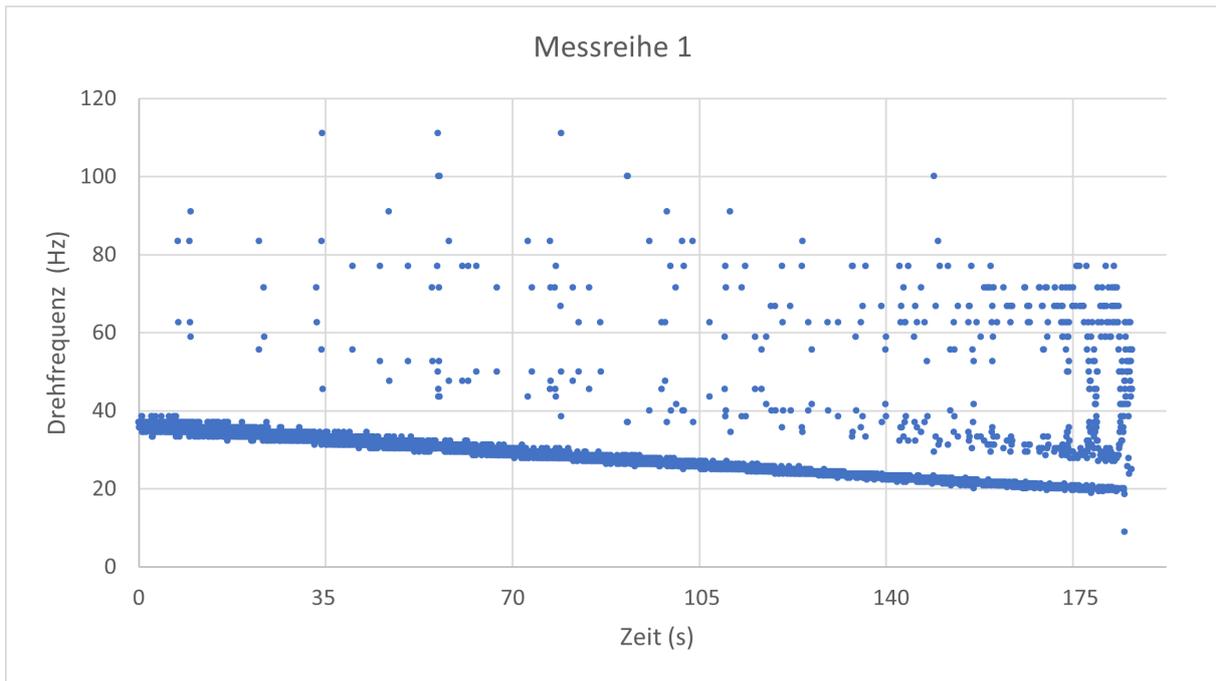
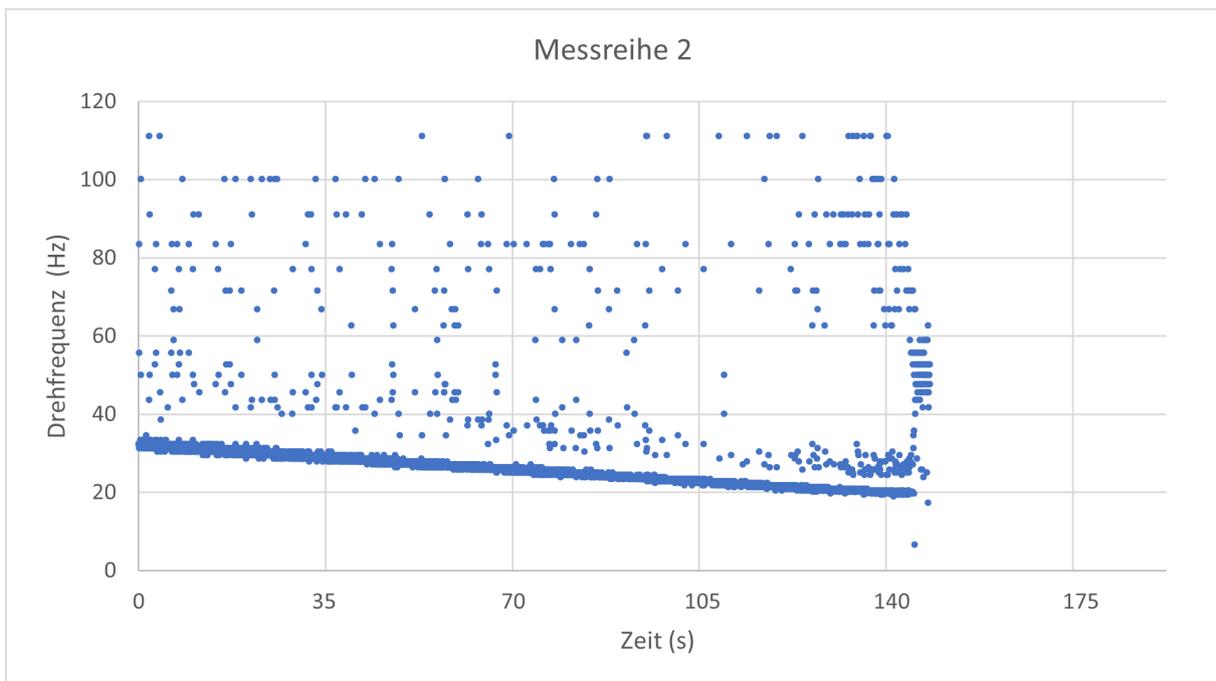


Abbildung 25: Messwerte eines 500 ms Ausschnittes des Intervalls gemäss Abbildung 24 der Messreihe 3. Es sind Perioden von ca. 30 Hz zu erkennen.

Abbildung 26: Die Drehfrequenz ω des Kreisels während der Messung 1.Abbildung 27: Die Drehfrequenz ω des Kreisels während der Messung 2.

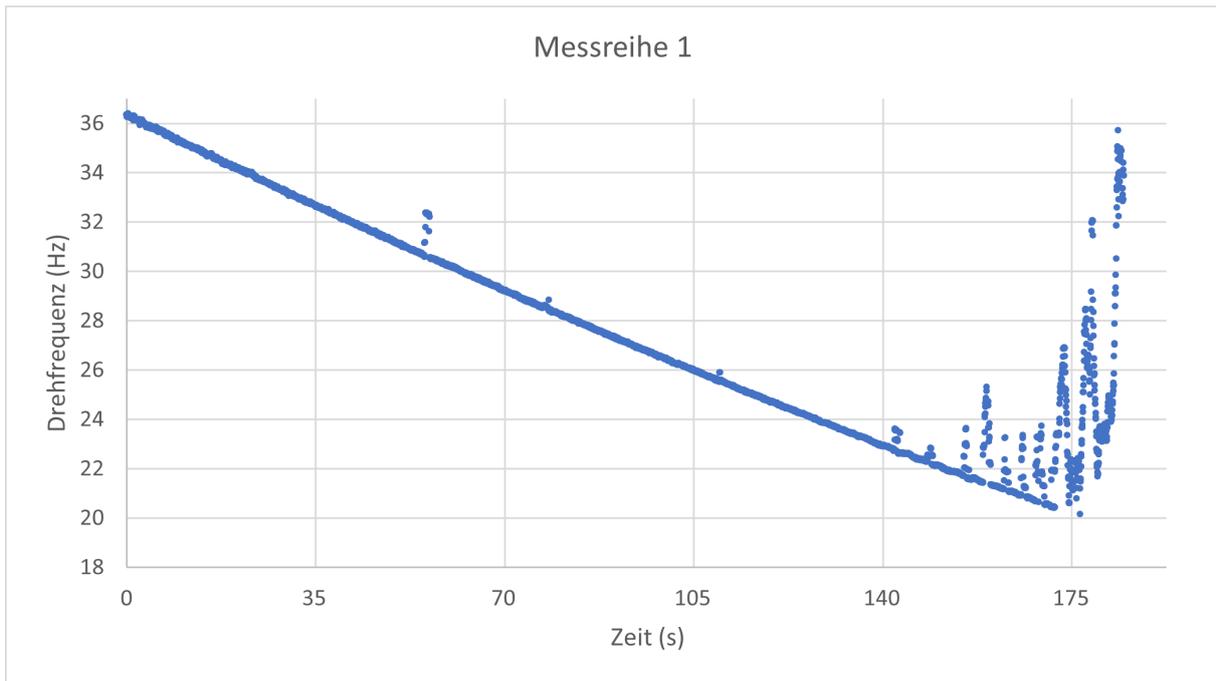


Abbildung 28: Die durchschnittliche Drehfrequenz ω des Kreisels. Ausreisser der Messung wurden ausgesiebt.

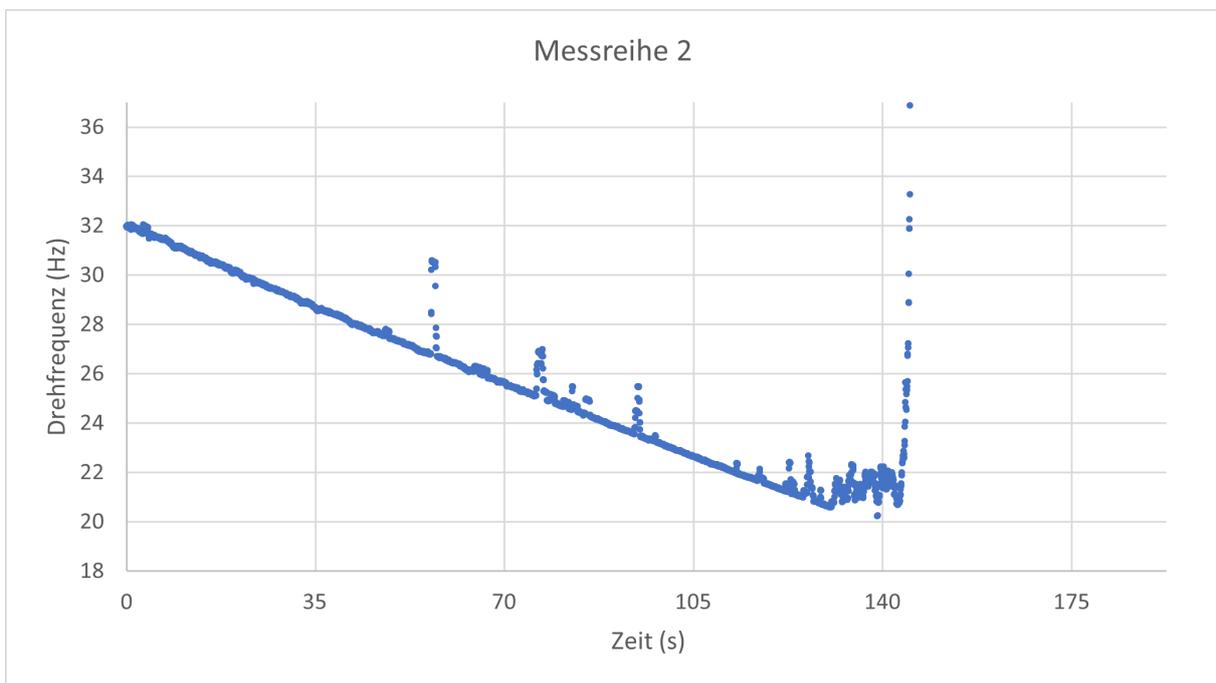
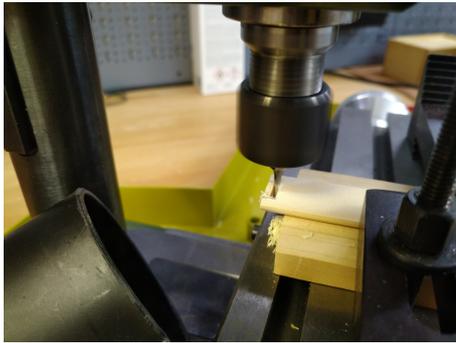


Abbildung 29: Die durchschnittliche Drehfrequenz ω des Kreisels. Ausreisser der Messung wurden ausgesiebt.

B. Anhang Bilder vom Bau des Antriebs



(a)



(b)

Abbildung 30: Mit einer Fräse wird in die Speichen der Spulen eine Vertiefung für den Draht gefräst (a). Die 8 Speichen werden von einem Mittelstück zusammengehalten, welches auch ausgefräst wurde (b).

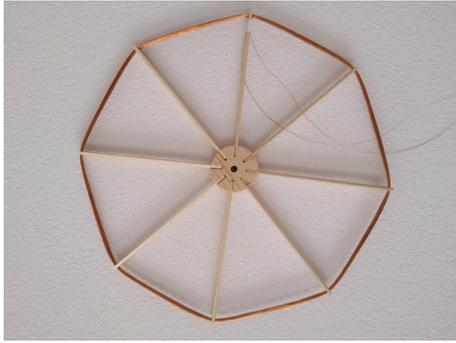


(a)

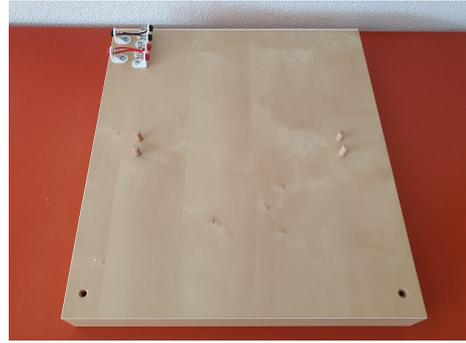


(b)

Abbildung 31: Der Draht wird auf die Spulen gewickelt (a). Der Halter der Spulen wird gebaut (b).



(a)



(b)

Abbildung 32: Eine von zwei fertig gewickelten Spulen (a). Eine Platte wird angefertigt, auf dem das Experiment aufgebaut wird (b).