

Die Colin de Verdière Invariante und das Vier-Farben Problem

Sascha Szirnyi

13.12.2022

Maturitätsarbeit an der Kantonsschule Freudenberg

Betreuende Lehrperson: Dr. Francesco Antognini

Abstract

Ziel dieser Arbeit ist es, die Verbindung der Colin de Verdière Invariante und dem Vier-Farben Problem aufzuzeigen. Dazu werden zunächst die Colin de Verdière Invariante definiert und einige Beispiele zur Berechnung dieser Invariante aufgeführt. Weiter wird dann speziell auf die Colin de Verdière Invariante für planare Graphen eingegangen, da sich das Vier-Farben Problem nur auf planare Graphen bezieht. In diesem Kontext wird auch ein vollständiger Beweis eines Planaritätskriteriums für Graphen durch die Colin de Verdière Invariante aufgeführt, welches die Grundlage für die Verbindung der Colin de Verdière Invariante mit dem Vier-Farben Problem darstellt. Im Hinblick auf das Vier-Farben Problem werden Grundbegriffe von Grapheneinfärbungen erarbeitet und erklärt. Zuletzt wird noch auf die berühmte Geschichte des Vier-Farben Problems eingegangen und der Weg zum Beweis von Kenneth Appel und Wolfgang Haken erörtert.

Modulo careful checking, it appears that four colors suffice. ~ Kenneth Appel

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Persönliche Motivation	5
1.2	Ziel und Inhalt der Arbeit	5
2	Die Colin de Verdière Invariante	7
2.1	Yves Colin de Verdière und seine Invariante	7
2.2	Definition der Colin de Verdière Invariante	8
3	Beispiele für die Colin de Verdière Invariante	9
3.1	Die Colin de Verdière Invariante für K_2	9
3.2	Die Colin de Verdière Invariante für K_n	11
3.3	Die Colin de Verdière Invariante für $\overline{K_n}$	12
4	Planarität	14
4.1	Beweis des Theorems 1.1 (iii)	16
5	Grapheneinfärbungen und die Chromatische Zahl	27
5.1	Einfärben von Flächen	27
5.2	Einfärben von Knotenpunkten	29
5.3	Einfärben von Kanten	30
5.4	Die Chromatische Zahl	31
5.4.1	Defintion der Chromatischen Zahl	31
6	Das Vier-Farben Problem	32
6.1	Definition des Vier-Farben Problems	32
6.2	Die Colin de Verdière Invariante und das Vier-Farben Problem	34
6.3	Die Geschichte des Vier-Farben Problems	36
6.3.1	Der Ursprung des Vier-Farben Problems	36
6.3.2	Minimale Gegenbeispiele	37
6.3.3	Unvermeidbare Mengen	38
6.3.4	Reduzierbare Konfigurationen	38
6.3.5	Die Lösung von Kenneth Appel und Wolfgang Haken	39
7	Schlusswort	43
7.1	Computer in der Mathematik	43
7.2	Fazit	44
8	Bibliographie	47
8.1	Literaturverzeichnis	47
8.2	Abbildungsverzeichnis	48

1 Einführung

Die Inhalte der Arbeit übersteigen - vor allem in den Kapiteln 2 bis 4 - die am Gymnasium vermittelten Kenntnisse in Mathematik. Daher wendet sie sich nicht direkt an Schüler und Schülerinnen auf gymnasialer Stufe. Diese Arbeit richtet sich vielmehr an eine Leserschaft mit einem Grundstudium in Mathematik oder Ähnlichem, da einiges Wissen in den Gebieten der Graphentheorie, der Linearen Algebra und der Topologie vorausgesetzt wird. Nichtsdestotrotz können die Kapitel, die sich mit Grapheneinfärbungen und dem Vier-Farben Problem beschäftigen auch ohne tiefere mathematische Kenntnisse interessant und verständlich sein.

1.1 Persönliche Motivation

Was mich in der Mathematik am meisten zum Staunen bringt, sind die Verbindungen zweier, auf den ersten Blick völlig verschiedener mathematischer Gebiete. Wenn plötzlich ein bestimmtes Gebiet aus einer neuen Perspektive durch die "Augen" eines völlig anderen Gebietes betrachtet wird und sich dadurch ganz neue Einblicke in nie zuvor erkannte Verbindungen eröffnen, dann führt dies mir die Schönheit der Mathematik vor Augen. Zudem zeigen diese Verbindungen von mathematischen Gebieten nicht nur die Schönheit und die Vielfalt der Mathematik auf; sie sind oftmals auch die Schlüsselideen, die jahrelang ungelöste Probleme lösen können.

Aus diesen Gründen wollte ich mich in meiner Maturitätsarbeit mit einer solchen Schnittstelle zwischen mathematischen Gebieten beschäftigen. Da mich vor allem die Topologie und die Graphentheorie faszinieren, war es für mich schnell klar, dass ich eine Arbeit über eine Verbindung dieser zwei Gebiete schreiben wollte.

Mit dieser ersten Idee meiner Arbeit stiess ich, durch Hilfe meiner Betreuungsperson Francesco Antognini, auf die sogenannte Colin de Verdière Invariante. Diese stellt genau eine solche Verbindung her - in diesem Fall eine Verbindung zwischen algebraischer und topologischer Graphentheorie.

1.2 Ziel und Inhalt der Arbeit

Die Graphentheorie hat sich im letzten Jahrhundert zu einem enorm wichtigen Bestandteil der Mathematik etabliert. Mit der Entwicklung der modernen Technologien ist die Graphentheorie zum Beispiel unabdingbar für Algorithmen und Kommunikationsnetzwerke geworden.

Während mehr als hundert Jahren war allerdings nicht die heutige Computertechnologie die vorantreibende Kraft, die die Fortschritte der Graphentheorie hervorgebracht hat. Es war ein altes, weltberühmtes mathematisches Rätsel: das Vier-Farben Problem. Seit dem Jahr 1976 - als dieses Rätsel gelöst wurde - erfuhr die Graphentheorie massiven Aufschwung und entwickelte sich zu dem breiten, wichtigen mathematischen Gebiet, das es heute ist.

Was mich an der Graphentheorie fasziniert, ist, dass Graphen im Prinzip extrem simpel zu gestalten und leicht zu verstehen sind und trotzdem unglaublich viele Anwendungsbereiche haben. Für mich ist die Graphentheorie durch ihre (oftmalige) Visualisierbarkeit so ein sehr erlebbarer und "haptischer" Teil der Mathematik, der zudem viel Freiheit und Kreativität beinhaltet.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Colin de Verdière Invariante für Graphen und dem Vier-Farben Problem. Der zentrale Kern und somit auch das Ziel dieser Arbeit ist dann die Verbindung des Vier-Farben Problems und der Colin de Verdière Invariante. Um diese Verbindung aufzuzeigen, wird in einem ersten Schritt Colin de Verdière und seine Invariante vorgestellt. In

einem weiteren Schritt wird die Colin de Verdère Invariante definiert und einige Beispiele werden mit eigenen Methoden errechnet. Mit diesen Grundlagen fokussiert sich die Arbeit dann auf die Colin de Verdère Invariante für planare Graphen, da sich das Vier-Farben Problem nur auf planare Graphen bezieht. Dazu wird kurz der allgemeine Begriff der Planarität eingeführt und dann widmet sich die Arbeit in einem grossen Abschnitt dem Beweis der Planaritäts-Charakterisierung eines Graphen durch die Colin de Verdère Invariante. Es wird dazu das Beweisverfahren von Hein Van der Holst in [1] verwendet, allerdings werden die einzelnen Beweisschritte ausführlicher und detaillierter nachvollzogen.

Der nächste Teil schafft diejenigen Bausteine des Teilgebietes der Grapheneinfärbungen, die ebenfalls nötig sind, um die Verbindung der Colin de Verdère Invariante und dem Vier-Farben Problem aufzuzeigen. Dazu werden drei verschiedene Arten von Grapheneinfärbungen (Flächen-, Knotenpunkt- und Kanteneinfärbungen) erklärt, und es wird gezeigt, wie Flächen- und Kanteneinfärbungen sich als Knotenpunkteinfärbungen darstellen lassen. Im Zuge der Knotenpunkteinfärbungen wird in einem nächsten Kapitel die Chromatische Zahl für Graphen eingeführt. Im letzten Kapitel wird schliesslich der Fokus auf das Vier-Farben Problem gelegt. Nach der Definition des Vier-Farben Problems kann dann auf die Verbindung des Vier-Farben Problems und der Colin de Verdère Invariante eingegangen werden. Zum Schluss des Hauptteils dieser Arbeit folgt eine Zusammenfassung der grossen Geschichte des Vier-Farben Problems und die ungefähre Beweisstrategie von Kenneth Appel und Wolfgang Haken wird aufgezeigt.

Als Abschluss dieser Arbeit wird noch - im Zusammenhang mit der Lösung des Vier-Farben Problems - die Rolle der Computer in der Mathematik kurz aufgegriffen. Mein Fazit schliesst diese Arbeit ab.

2 Die Colin de Verdière Invariante

2.1 Yves Colin de Verdière und seine Invariante

Die Colin de Verdière Invariante hat ihren Namen von ihrem Erfinder, dem französischen Mathematiker Yves Colin de Verdière. Dieser studierte an der École Normale Supérieure, wo er auch im Jahr 1973 seinen Dokortitel erhielt. Den Grossteil seiner mathematischen Karriere verbrachte er an der Joseph Fourier Universität (heute die Universität Grenoble Alpes) in Grenoble. In seiner wissenschaftlichen Laufbahn schrieb er grundlegende Arbeiten in den Bereichen der Riemann'schen Geometrie, der Graphentheorie oder der Geophysik [2].



Abb. 1: Yves Colin de Verdière beim Erhalt der Émile-Picard Medaille.

1990 veröffentlichte er seine Arbeit *"Sur un Nouvel Invariant des Graphes et un Critère de Planarité"* [3] zu einer neuen Invariante für einen Graphen G , welche er mit $\mu(G)$ bezeichnete. Motiviert war seine Arbeit durch die Studie der maximalen Multiplizität des zweiten Eigenwerts bestimmter Schrödinger Operatoren, welche auf Riemann'schen Flächen definiert sind [4]. Für eine erste Definition seiner Invariante benutzte Colin de Verdière die Differentialtopologie [5], später wurde dann auch eine äquivalente Definition via Matrizen gefunden. Dies ist auch die Definition, die in dieser Arbeit verwendet wird.

Was die Colin de Verdière Invariante auszeichnet ist, dass sie - als algebraischer Parameter - auch topologische Eigenschaften von Graphen charakterisiert. Genauer; die Colin de Verdière Invariante sagt etwas über die Einbettung eines Graphen in eine topologische Fläche aus. Sie schlägt somit eine Brücke zwischen der algebraischen und der topologischen Graphentheorie. Das für diese Arbeit wichtigste Resultat ist Charakterisierung der Planarität mittels der Colin de Verdière Invariante. Dieses Resultat präsentierte Colin de Verdière bereits in seiner ursprünglichen Arbeit.

Mit der Zeit wurden immer mehr solche Charakterisierungen der Einbettbarkeit eines Graphen durch die Colin de Verdière Invariante gefunden, welche im nächsten Kapitel im Theorem 1.1 aufgeführt werden. Anzumerken ist ebenfalls, dass die Colin de Verdière Invariante auch andere nützliche Graphentheoretische Eigenschaften hat, mit welchen wir uns aber im Rahmen dieser Arbeit nicht beschäftigen werden. Eine solche Eigenschaft ist zum Beispiel, dass die Colin de Verdière Invariante minoren-monoton ist - ein Resultat, welches Colin de Verdière ebenfalls von Beginn an in seiner Arbeit [3] beweisen konnte. Somit kommen wir nun zu der Definition der Colin de Verdière Invariante.

2.2 Definition der Colin de Verdière Invariante

Wir betrachten einen ungerichteten Graphen G ohne mehrfache Kanten und ohne Kanten, die in der Form $e = \{v_x, v_x\}$ (englisch: *loop*) sind. Die Colin de Verdière Invariante für diesen Graphen G ist dann definiert als:

$$\mu(G) := \max_{M \in \mathcal{L}_G} \text{korang}(M)$$

wobei \mathcal{L}_G die Menge aller symmetrischen, reellen $(n \times n)$ -Matrizen M ist, die folgende drei Eigenschaften erfüllen:

- (1) M erfüllt die Starke Arnold Hypothese (kurz *SAH*). Damit eine symmetrische, reelle $(n \times n)$ -Matrix die *SAH* erfüllt, darf es **keine** symmetrische Matrix X geben, für die Folgendes gelten würde:
 - (a) $X \neq O$, $X_{ij} = 0$ falls $i = j$ (X hat eine Null-Diagonale)
 - (b) $MX = O$ (Matrix-Multiplikation), $M \circ X = O$ (Komponentenweise Multiplikation)
- (2) Für die Einträge M_{ij} von M gelten folgende Bedingungen:
 - (a) $M_{ij} < 0$ falls $v_i \sim v_j$ (Die Knotenpunkte v_i und v_j sind durch eine Kante verbunden.)
 - (b) $M_{ij} = 0$ falls $v_i \not\sim v_j$ (Die Knotenpunkte v_i und v_j sind durch **keine** Kante verbunden.)
 - (c) Für die Diagonale von M gibt es keine Bedingung.
- (3) M hat nur einen negativen Eigenwert mit Multiplizität 1.

Matrizen, die die oben genannten Eigenschaften erfüllen, werden Colin de Verdière Matrizen genannt. Diejenigen Colin de Verdière Matrizen, die einen maximalen Korang (oder gleichbedeutend einen minimalen Rang) haben, werden optimale Colin de Verdière Matrizen genannt [6].

Die Colin de Verdière Invariante ist ein algebraischer Parameter, allerdings hat sie trotzdem auch einen starken Zusammenhang mit topologischen Eigenschaften von Graphen. So sagt folgendes Theorem etwas über die "Einbettbarkeit" von einzelnen Graphen aus. Die topologischen Begrifflichkeiten werden als gegeben vorausgesetzt.

Theorem 1.1 [4]

- (i) $\mu(G) \leq 1$, falls G die disjunkte Vereinigung von Pfaden ist.
- (ii) $\mu(G) \leq 2$, falls G ausserplanar ist.
- (iii) $\mu(G) \leq 3$, falls G planar ist.
- (iv) $\mu(G) \leq 4$, falls G linklos einbettbar ist.
- (v) $\mu(G) \leq 5$, falls G in die reelle projektive Ebene oder in die Klein'sche Flasche einbettbar ist.
- (vi) $\mu(G) \leq 6$, falls G in den Torus einbettbar ist.

3 Beispiele für die Colin de Verdière Invariante

3.1 Die Colin de Verdière Invariante für K_2

Die Colin de Verdière Invariante für komplette Graphen K_n lässt sich allgemein für eine beliebige Anzahl Knotenpunkte n bestimmen. Zunächst aber ein Beispiel, in dem man die Colin de Verdière Invariante für einen kompletten Graphen aufwändig herleitet. Wir betrachten den simpelsten nontrivialen kompletten Graphen K_2 :

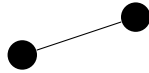


Abb. 2: K_2

Die Colin de Verdière Matrizen von K_2 werden allgemein immer folgende Form annehmen:

$$M_{K_2} = \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

Wobei $m_{12} > 0$, $m_{21} > 0$ gilt, und m_{11} , m_{22} (zunächst) beliebig gewählt werden. Im nächsten Schritt werden die Bedingungen (1)-(3) aus Kapitel 1 geprüft:

- (1) Die Matrix M_{K_2} muss die *SAH* erfüllen. Damit dies zutrifft, darf es keine Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

geben, für die

$$\begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix} = O$$

und

$$\begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix} = O$$

Letzteres kann sicher nicht eintreffen, da X nicht die Null-Matrix sein darf (also $x_{12}, x_{21} \neq 0$) und $-m_{12}, -m_{21} \neq 0$. Auch die Bedingung dass $MX \neq O$ ist leicht erfüllt:

$$\begin{pmatrix} m_{11} \\ -m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_{21} \end{pmatrix} = -m_{12}x_{21}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} \\ -m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ 0 \end{pmatrix} = m_{11}x_{12}$$

$$\begin{pmatrix} -m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_{21} \end{pmatrix} = m_{22}x_{21}$$

$$\begin{pmatrix} -m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ 0 \end{pmatrix} = -m_{21}x_{12}$$

Damit die Gleichung $MX = O$ erfüllt wäre, müssten alle obigen Einträge der Matrix $B = MX$ Null sein. Das kann allerdings auch nie erfüllt sein, da $m_{12}, m_{21}, x_{12}, x_{21} \neq 0$. M_{K_2} erfüllt also die *SAH* für $m_{12} > 0, m_{21} > 0$.

(2) Diese Bedingung ist für M_{K_2} per Definition schon erfüllt.

(3) Die Matrix M_{K_2} hat nur einen negativen Eigenwert mit Multiplizität 1. Wir rechnen also:

$$\begin{aligned} \det(M_{K_2} - \lambda I) &= 0 \\ \Rightarrow (m_{11} - \lambda)(m_{22} - \lambda) - m_{12}m_{21} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{m_{11} + m_{22} \pm \sqrt{(m_{11} + m_{22})^2 - 4(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})}}{2} \end{aligned}$$

Damit die Matrix M_{K_2} maximal einen negativen Eigenwert hat (Die Wurzel in der obigen Gleichung ist für reelle Einträge m_{ij} immer positiv) muss noch gelten:

$$\sqrt{(m_{11} + m_{22})^2 - 4(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})} > m_{11} + m_{22}$$

(Es zeigt sich, dass m_{11} und m_{22} negativ gewählt werden müssen.)

Um die optimale Colin de Verdière Matrix aus \mathcal{L}_{K_2} zu finden, suchen wir eine Matrix der Form

$$M_{K_2} = \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

für die ihr Rang minimal ist. Zudem muss sie auch folgende Eigenschaften erfüllen:

(i)
$$\sqrt{(m_{11} + m_{22})^2 - 4(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})} > m_{11} + m_{22}$$

(ii)
$$m_{12}, m_{21} > 0$$

Die wohl einfachste Möglichkeit, eine Matrix M_{K_2} mit folgenden Eigenschaften zu bilden ist:

$$M_{K_2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $m_{11} = m_{22} = -1$ und $m_{12} = m_{21} = 1$. Die Bedingungen (i) und (ii) sind für diese Matrix klar erfüllt. Der Rang dieser Matrix ist 1, somit ist:

$$\text{korang}(M_{K_2}) = 1$$

Damit der Korang der Matrix M_{K_2} kleiner als 1 - also gleich 0 - wäre, müsste die Matrix M_{K_2} die Nullmatrix O sein. (Die Nullmatrix ist die einzige Matrix mit Rang 0.) Dies kann aber nach den Bedingungen (i), (ii) und der *SAH* nicht der Fall sein. Wir können also mit Sicherheit sagen, dass die Matrix M_{K_2} eine optimale Colin de Verdière Matrix ist, und somit können wir auch mit Bestimmtheit sagen dass: $\mu(K_2) = 1$. \square

3.2 Die Colin de Verdière Invariante für K_n

Wie unschwer zu erkennen ist, erweist sich dieses explizite Ausrechnen als sehr aufwendiges Verfahren. Für komplette Graphen mit mehr als nur zwei Knotenpunkten ist dieses somit ungeeignet, denn nur schon für fünf Knotenpunkte wäre der vorherige Weg die Colin de Verdière Invariante von K_5 zu berechnen ungeheuer schwierig.

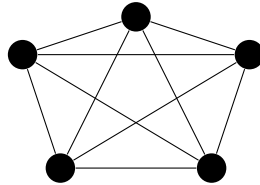


Abb. 3: K_5

Um trotzdem die Colin de Verdière Invariante von kompletten Graphen mit beliebig vielen Knotenpunkten zu berechnen, benötigt man ein geschickteres Verfahren. Für komplette Graphen wissen wir Folgendes über die Einträge der Colin de Verdière Matrix:

- (a) $m_{ij} < 0$ falls $i \neq j$
- (b) m_{ij} beliebig wählbar, falls $i = j$

Wir wählen der Einfachheit halber $m_{ij} = -1$ für alle i, j . Die Bedingung (2) aus Kapitel 2.2 ist dann sicher erfüllt. Wir haben somit $M_{K_n} = -J_n$. J_n ist hierbei die Matrix, bei der alle Einträge 1 sind. Die Eigenwerte dieser Matrix sind nicht schwer zu berechnen. Sei

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor der Matrix M_{K_n} . Dann gilt sicher:

$$\begin{aligned} -J_n v &= \lambda v \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 + \dots + v_n \\ \vdots \\ v_1 + \dots + v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\lambda v_1 \\ \vdots \\ -\lambda v_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt nun, dass das Spektrum (die Menge der Eigenwerte) der Matrix M_{K_n} folgendes ist: $\sigma(M_{K_n}) = \{-n, 0, \dots, 0\}$. Die Bedingung (3) aus Kapitel 2.2 ist somit ebenfalls für $M_{K_n} = -J_n$ erfüllt.

Auch die SAH ist leicht zu zeigen: $M_{K_n} \circ X = O$ ist nie erfüllt, ohne dass $X = O$. Dies genügt schon, um zu zeigen, dass $-J_n$ die SAH erfüllt.

Die Matrix $M_{K_n} = -J_n$ ist also eine Colin de Verdière Matrix, da sie alle drei Bedingungen erfüllt. Der Rang von $M_{K_n} = -J_n$ ist 1 und dies ist auch der kleinstmögliche Rang. Der maximale Korang der Matrix M_{K_n} ist somit $n - 1$. Deshalb finden wir für die Colin de Verdière Invariante für komplette Graphen folgendes Resultat:

$$\mu(K_n) = n - 1.$$

3.3 Die Colin de Verdière Invariante für $\overline{K_n}$

Das Komplement \overline{G} eines Graphen G erhält man, indem man zwei Knotenpunkte v_i, v_j (aus dem Graphen G) nur dann miteinander verbindet, wenn sie nicht schon in G miteinander verbunden sind. (Gilt also zum Beispiel im Graphen G : $v_i \sim v_j$, so gilt für den Graphen \overline{G} zwingend: $v_i \not\sim v_j$ und umgekehrt.) Das Komplement eines kompletten Graphen K_n ist also einfach nur die Menge aller n Knotenpunkte aus K_n , von denen keine durch eine Kante verbunden sind. So zum Beispiel hier für K_5 :

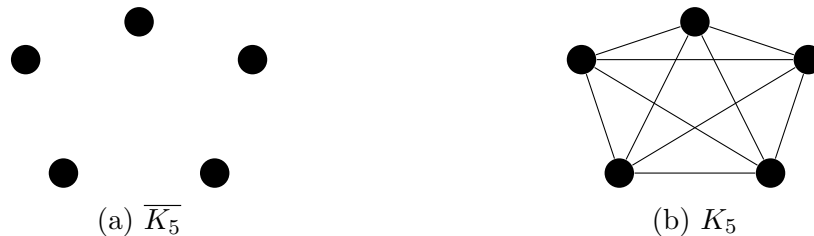


Abb. 4

Um die Colin de Verdière Invariante für $\overline{K_n}$ zu berechnen, betrachten wir zunächst die allgemeine Form einer Colin de Verdère Matrix von $\overline{K_n}$. Da $\overline{K_n}$ per Definition von K_n bloss aus einzelnen Knotenpunkten besteht, die durch keine Kante mit anderen Knotenpunkten verbunden sind. Die Einträge der zu $\overline{K_n}$ zugehörigen optimalen Colin de Verdière Matrix sind also immer null, sofern $i \neq j$ gilt. Falls wir den Fall haben, dass $i = j$ - wir also die Einträge der Diagonalen der Matrix betrachten - so dürfen sicher nicht alle Einträge m_{ij} $i = j$ Null sein. Dies würde nämlich dazu führen, dass M die Nullmatrix ist und somit die Starke Arnold Hypothese nicht erfüllt. Die allgemeine Form der Colin de Verdière Matrix für $\overline{K_n}$ sieht also so aus:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & & O \\ & \ddots & \\ O & & m_{nn} \end{pmatrix}$$

Damit die Bedingung (3) aus Kapitel 2.2 erfüllt ist, darf die Matrix M nur einen negativen Diagonaleintrag haben, da aus

$$\det \begin{pmatrix} m_{11} - \lambda & & O \\ & \ddots & \\ O & & m_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = (m_{11} - \lambda) \dots (m_{nn} - \lambda) = 0$$

folgt, dass das Spektrum von M das folgende ist:

$$\sigma(M) = \{m_{11}, \dots, m_{nn}\}.$$

Weil die Bedingung (3) verlangt, dass nur einer dieser Eigenwerte negativ ist, muss exakt ein Diagonaleintrag von M negativ sein.

Um einen maximalen Korang zu erhalten - oder gleichbedeutend einen minimalen Rang - müssen wir bloss schauen, wieviele der Einträge m_{ii} gleich Null sein können, sodass die Starke Arnold Hypothese immer noch erfüllt ist. $M \circ X = O$ gilt sicher, da X per Definition nur Nullen in der Diagonalen hat. Es zeigt sich, dass nur einer der Diagonaleinträge von M gleich null sein kann, denn sonst würde eine Matrix X existieren die nicht-null ist und $MX = 0$ erfüllt. Grund

dafür ist, dass die Matrix X symmetrisch ist, wodurch $x_{ij} = x_{ji}$ gilt. Dann haben wir:

$$MX = \begin{pmatrix} 0 & \dots & m_{11}x_{1j} & \dots & m_{11}x_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ m_{jj}x_{j1} & & 0 & & m_{jj}x_{jn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ m_{nn}x_{n1} & \dots & m_{nn}x_{nj} & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & m_{11}x_{1j} & \dots & m_{11}x_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ m_{jj}x_{1j} & & 0 & & m_{jj}x_{nj} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ m_{nn}x_{1n} & \dots & m_{nn}x_{nj} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun annehmen, dass zwei der Diagonaleinträge von M - zum Beispiel m_{11} und m_{jj} - gleich Null sind, so könnte die Matrix X nur Nulleinträge enthalten, bis auf x_{1j} und somit auch x_{j1} , da X symmetrisch ist. So würde $MX = 0$ gelten, und X wäre auch nicht-null. Also wissen wir, dass die Matrix M die SAH nicht erfüllt, wenn sie mehr als zwei Nulleinträge in der Diagonalen hat. Die SAH ist aber erfüllt, wenn nur ein Diagonaleintrag m_{jj} gleich Null ist. Wäre nämlich $x_{j1} \neq 0$, muss auch $x_{1j} \neq 0$ sein. Da aber m_{11} nach Annahme nicht null ist, muss auch $m_{11}x_{1j} \neq 0$ sein, womit $MX \neq 0$ wäre. Somit gibt es also keine Matrix X die nicht-null ist und $MX = 0$ erfüllt, wenn nur ein Diagonaleintrag von M gleich Null ist. Die Matrix M erfüllt somit die SAH.

Da nur ein Diagonalelement der Matrix M gleich Null ist, gilt für ihren maximalen Korang: $\text{korang}(M) = 1$. Somit erhalten wir für die Colin de Verdière Invariante für \overline{K}_n das folgende Resultat:

$$\mu(\overline{K}_n) = 1.$$

4 Planarität

In der Graphentheorie werden planare Graphen wie folgt definiert: Ein Graph ist genau dann planar, wenn es eine Einbettung des Graphens in die Ebene gibt, so dass sich keine Kanten überkreuzen [7]. So ist es leicht zu sehen, dass zum Beispiel der komplette Graph K_4 planar ist, K_5 aber nicht mehr. K_4 lässt sich in die Ebene einbetten - einfacher gesagt: "flachdrücken" - ohne dass sich Kanten überschneiden. Bei K_5 ist dies nicht möglich.



Abb. 5

Um zu beweisen, dass ein Graph planar (oder nicht planar) ist, können wir zum Beispiel das *Jordan-Kurven Theorem* verwenden [8].

Theorem 3.1 *Das Jordan-Kurven Theorem*

Jede geschlossene, simple Kurve (eine geschlossene Jordan Kurve) C in der Ebene teilt die Ebene in zwei disjunkte, wegzusammenhängende, offene Mengen.

Eine *wegzusammenhängende* Menge ist eine Menge, in der zwei beliebige Punkte durch eine Kurve verbunden werden können, sodass alle Punkte der Kurve vollständig in der Menge liegen. Wir lassen hier einen Beweis dieses Theorems aus und verwenden es nur, um einen Beweis für die Nonplanarität des Graphen $K_{3,3}$ zu liefern.

Theorem 3.2 $K_{3,3}$ ist nicht planar

Beweis Das Theorem 3.2 beweisen wir mithilfe des Theorems 3.1 durch Widerspruch. Wir nehmen also an, der Graph $K_{3,3}$ sei planar. Wir können das Theorem 3.1 in diesem Fall verwenden, da der Graph $K_{3,3}$ per Definition geschlossene Kurven enthält. So zum Beispiel die geschlossene Kurve $C := v_1v_4v_2v_5v_1$.

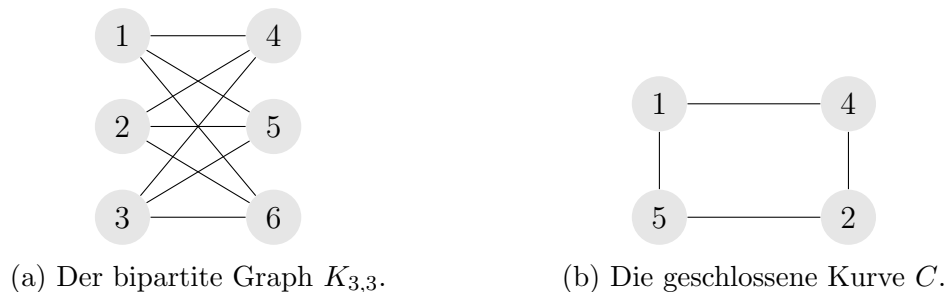


Abb. 6

Nach dem Jordan-Kurven Theorem können wir sagen, dass diese Kurve C die Ebene in zwei disjunkte Mengen teilt: nennen wir dabei die Menge aller Punkte innerhalb der Kurve C $\text{in}(C)$ und die Menge aller Punkte ausserhalb der Kurve C $\text{ex}(C)$. Das Jordan-Kurven Theorem impliziert auch direkt, dass eine Kurve, die zwei Punkte $v_i \in \text{in}(C)$ und $v_j \in \text{ex}(C)$ verbindet, die Kurve C sicher in mindestens einem Punkt schneidet. Wir können nun ohne Verlust der Allgemeingültigkeit annehmen, dass der Knotenpunkt v_3 innerhalb der Kurve C liegt, also $v_3 \in \text{in}(C)$. Dadurch liegen die Kanten $\{v_3, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$ sicher auch innerhalb der Kurve C . Nun fehlt nur noch der Knotenpunkt v_6 und die Kanten $\{v_1, v_6\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_3, v_6\}$. Angenommen $v_6 \in \text{ex}(C)$, so ist der dabei erhaltene Graph nicht planar, da die Kante $\{v_3, v_6\}$ die Kurve C sicher schneiden muss. Daher müssen wir annehmen, dass v_6 ebenfalls innerhalb der Kurve C liegt.

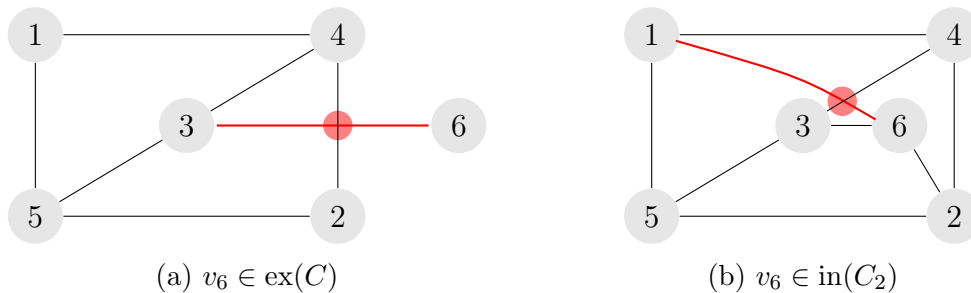


Abb. 7

Nun haben wir zwei Möglichkeiten, wo v_6 liegt: entweder innerhalb der Kurve $C_1 := v_1v_4v_3v_5v_1$ oder innerhalb der Kurve $C_2 := v_4v_2v_5v_3v_4$. Wie wir aber schon aus Abbildung 7(b) entnehmen können, funktioniert dies auch nicht. Formal können wir wieder mit dem Theorem 3.1 argumentieren: Wenn $v_6 \in \text{in}(C_2)$ ist ganz bestimmt $v_1 \in \text{ex}(C_2)$, die Kante $\{v_1, v_6\}$ schneidet also ganz sicher die Kurve C_2 . Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme. Analog können wir vorgehen, wenn wir annehmen, dass $v_6 \in \text{in}(C_1)$. Es gilt ganz sicher $v_2 \in \text{ex}(C_1)$, also muss die Kante $\{v_2, v_6\}$ die Kurve C_1 nach Theorem 3.1 ebenfalls schneiden. (Die Knotenpunkte v_1 und v_2 können nicht innerhalb der Kurven C_2 respektive C_1 liegen, denn sonst wäre wider der Annahme $v_3 \in \text{ex}(C)$.) In allen möglichen Fällen haben wir also einen Widerspruch zu der Annahme, dass $K_{3,3}$ planar ist. Also ist das Theorem 3.2 bewiesen. \square

Jedoch ist die Definition der Planarität eines Graphen mittels offenen Jordan-Kurven für die Graphentheorie eher untypisch. In der Graphentheorie werden Eigenschaften von Graphen - eine solche Eigenschaft wäre zum Beispiel die Planarität - meist nur mit kombinatorischen und algebraischen Mitteln beschrieben. Mit den Jordan-Kurven definiert man die Planarität über einen Weg durch die Differentialgeometrie. Folglich ist es also gut nachvollziehbar, wenn man eine andere Definition der Planarität eines Graphen sucht. Eine Definition, welche keine "Umwege" in die Differentialgeometrie verlangt und nur aus kombinatorischen und algebraischen Vorgehensweisen aufgebaut ist.

Genau eine solche neue Definition der Planarität eines Graphen liefert die Colin de Verdière Invariante $\mu(G)$. Eine der wichtigsten Eigenschaften dieses algebraischen Parameters für Graphen ist nämlich, dass ein Graph genau dann planar ist, wenn für seine Colin de Verdière Invariante $\mu(G) \leq 3$ gilt. Dieses Resultat hat Yves Colin de Verdière in seiner Publikation "Sur un Nouvel Invariant des Graphes et un Critère de Planarité" im *Journal of Combinatorial Theory* [3] vorgestellt und auch bewiesen. Einen rein kombinatorischen Beweis dieses Theorems lieferte dann H. Van der Holst 1995 im selben Journal nach [1]. Wir werden im folgenden Kapitel nur diesen Beweis von Van der Holst betrachten.

4.1 Beweis des Theorems 1.1 (iii)

Zunächst benötigen wir ein Hilfsresultat um diesen Beweis durchzuführen. Dafür definieren wir zusätzlich noch einige neue Notationen. Der Support eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Indizes der Komponenten x_i von x für die $x_i \neq 0$ gilt ($\text{supp}(x) := \{i | x_i \neq 0\}$). Auch sei $\text{supp}_+(x) := \{i | x_i > 0\}$ und $\text{supp}_-(x) := \{i | x_i < 0\}$. Für jede Teilmenge $U \subset V$ (wobei die Menge V die Menge der Knotenpunkte des zu betrachtenden Graphen ist) sei $\langle U \rangle$ der Teilgraph von G induziert durch die Knotenpunkte $\in U$.

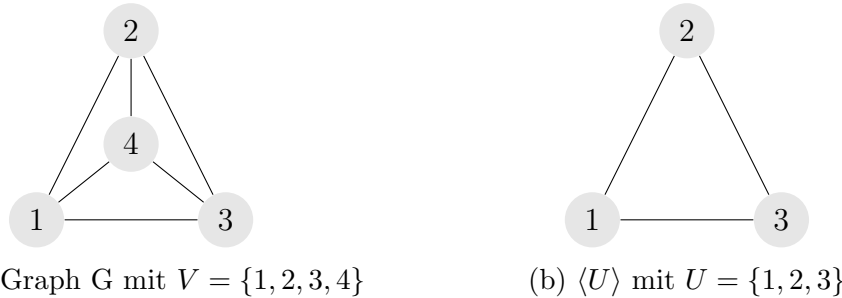


Abb. 8: Der Teilgraph $\langle U \rangle$ von G

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, dann schreiben wir x_I für den durch die Indizes aus der Menge I induzierten Teilvektor von x . Als Beispiel:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad I = \{1, 3\}$$

Dann schreiben wir x_I als durch die Indizes aus $I = \{1, 3\}$ induzierten Vektor. Einfacher gesagt, wir schreiben nur die Komponenten des Vektors x , deren Indizes in der Menge I enthalten sind:

$$x_I = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Gleich definieren wir für eine $n \times n$ -Matrix M die Matrix $M_{I \times J}$ als die durch die Teilmengen $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ und $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ induzierte Matrix. Dabei induziert die Menge I die Reihen-Indizes und J induziert die Spalten-Indizes. Als Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{pmatrix} \quad I = \{1, 3\} \quad , \quad J = \{2, 3\}$$

Dann erhalten wir die Matrix $M_{I \times J}$ wie folgt: Die Menge I induziert die Reihen-Indizes. Da $I = \{1, 3\}$ schreiben wir für die Matrix $M_{I \times J}$ nur die Reihen 1 und 3 der ursprünglichen Matrix M . J induziert die Spalten-Indizes; da $J = \{2, 3\}$ schreiben wir für die neue Matrix nur die Spalten 2 und 3.

$$M_{I \times J} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 21 & 34 \end{pmatrix}$$

Der Kern einer Matrix $\text{kern}(M)$ ist die Menge aller Vektoren x für die $Mx = \vec{0}$ gilt. Also: $\text{kern}(M) := \{x \in \mathbb{R}^n | Mx = \vec{0}\}$.

Wir sagen ein Vektor $x \in \text{kern}(M)$ hat *minimalen Support*, falls folgende Eigenschaft auf ihn zutrifft: x sei nicht-null (nicht alle Einträge von x sind gleich null). Zu jedem $y \in \text{kern}(M)$ mit $\text{supp}(y) \subseteq \text{supp}(x)$ gilt dann zwingend $\text{supp}(y) = \text{supp}(x)$.

Lemma 1

Sei G ein zusammenhängender Graph und M sei eine Colin de Verdière Matrix dieses Graphen. Sei nun $x \in \text{kern}(M)$ mit minimalem Support. Dann sind $\langle \text{supp}_+(x) \rangle$ und $\langle \text{supp}_-(x) \rangle$ beides zusammenhängende Graphen.

Beweis von Lemma 1

Wir beweisen dieses Hilfsresultat mithilfe eines Beweises durch Widerspruch. Wir nehmen also zunächst an, der Graph $\langle \text{supp}_+(x) \rangle$ sei **nicht** zusammenhängend. Führt diese Annahme zu einem Widerspruch, so können wir mit Sicherheit sagen, dass $\langle \text{supp}_+(x) \rangle$ zusammenhängend sein muss. Als Beispiel hier ein Graph, der nicht zusammenhängend ist:

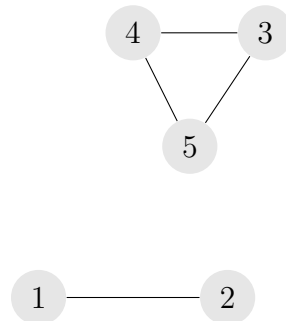


Abb. 9: Ein nicht zusammenhängender Graph

Die zwei Komponenten dieses Graphs wären $I = \{1, 2\}$ und $J = \{3, 4, 5\}$. Zunächst definieren wir noch: $K := \text{supp}_-(x)$. Wenn wir also annehmen, dass $\langle \text{supp}_+(x) \rangle$ nicht zusammenhängend ist, so gibt es mindestens zwei Komponenten I und J des Graphen $\langle \text{supp}_+(x) \rangle$. Unter dieser Annahme ist klar, dass der Knotenpunkt i in $\langle \text{supp}_+(x) \rangle$ sicher nicht durch eine Kante mit dem Knotenpunkt j verbunden ist, wenn $i \in I$ und $j \in J$. Wenn zwei Knotenpunkte in $\langle \text{supp}_+(x) \rangle$ nicht verbunden sind, dann können sie auch im ursprünglichen Graphen G nicht verbunden sein, denn den Teilgraphen $\langle \text{supp}_+(x) \rangle$ erhält man durch Löschen der Knotenpunkte $\notin \text{supp}_+(x)$. Das bedeutet für die Einträge der Colin de Verdière Matrix M : $m_{ij} = 0$ falls $i \in I$ und $j \in J$. Wir beweisen zunächst folgende Gleichungen:

$$M_{I \times I} x_I + M_{I \times K} x_K = 0 \quad (1)$$

$$M_{J \times J} x_J + M_{J \times K} x_K = 0 \quad (2)$$

Diese gelten, weil wir vorausgesetzt haben, dass $x \in \text{kern}(M)$. Somit gilt per Definition des Kerns einer Matrix $Mx = \vec{0}$. Genauer gilt für die Einzelnen Komponenten m_{pq} der Matrix M und die Komponenten x_q des Vektors x folgendes:

$$\sum_{q=1}^n m_{pq} x_q = 0 \quad \forall p \in \{1, \dots, n\}$$

Wir wissen zudem, dass $m_{pq} = 0$ falls $p \in I$ und $q \in J$. Auch wissen wir - weil der Vektor x per Definition minimalen Support hat und somit alle Komponenten von x_q gleich null sind,

wenn $q \notin \text{supp}(x)$ - dass $x_q = 0$ falls $q \notin I, q \notin J$ und $q \notin K$. (Wir nehmen hier an, dass der Graph $\langle \text{supp}_+(x) \rangle$ aus bloss zwei Komponenten I und J besteht. Die Argumentation im Beweis von Lemma 1 hält auch für beliebig viele Komponenten von $\langle \text{supp}_+(x) \rangle$.) Somit können wir sagen, dass die einzigen Möglichkeiten, bei denen die einzelnen Summanden von $\sum_{q=1}^n m_{pq}x_q = 0 \quad \forall p \in \{1, \dots, n\}$ nicht zwingend null sind, folgende sind:

$$\begin{aligned} m_{pq}x_q \neq 0 &\iff q \in I \text{ und } p \in I \\ m_{pq}x_q \neq 0 &\iff q \in K \text{ und } p \in K \\ m_{pq}x_q \neq 0 &\iff q \in I \text{ und } p \in K \\ m_{pq}x_q \neq 0 &\iff q \in K \text{ und } p \in I \\ m_{pq}x_q \neq 0 &\iff q \in J \text{ und } p \in J \\ m_{pq}x_q \neq 0 &\iff q \in J \text{ und } p \in K \\ m_{pq}x_q \neq 0 &\iff q \in K \text{ und } p \in J \end{aligned}$$

Für uns sind allerdings nicht alle Möglichkeiten von Relevanz. Wir können die Summen $\sum_{q=1}^n m_{pq}x_q = 0 \quad \forall p \in \{1, \dots, n\}$ mithilfe der oben genannten Möglichkeiten neu schreiben und neu formieren um die Gleichungen (1) und (2) zu erhalten:

Nach Möglichkeit ($m_{pq}x_q \neq 0 \iff q \in I$ und $p \in I$) und ($m_{pq}x_q \neq 0 \iff q \in K$ und $p \in I$): In der i 'ten-Reihe ($i \in I$) des Vektors Mx haben wir dann folgende Summe:

$$\sum_{q \in I} m_{iq}x_q + \sum_{q \in K} m_{iq}x_q$$

Weil $x \in \text{kern}(M)$ wissen wir, dass diese Summe gleich null sein muss:

$$\Rightarrow \sum_{q \in I} m_{iq}x_q + \sum_{q \in K} m_{iq}x_q = \sum_{q=1}^n m_{iq}x_q = 0 \quad (3)$$

Zudem können wir

$$\begin{pmatrix} \sum_{q \in I} m_{i_1 q}x_q \\ \vdots \\ \sum_{q \in I} m_{i_i q}x_q \end{pmatrix} = M_{I \times I}x_I \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \sum_{q \in K} m_{i_1 q}x_q \\ \vdots \\ \sum_{q \in K} m_{i_i q}x_q \end{pmatrix} = M_{I \times K}x_K$$

schreiben, wobei hier i_1, \dots, i_i alle Elemente von I sind. Schliesslich erhalten wir einen Ausdruck für die Gleichungen (1):

$$M_{I \times I}x_I + M_{I \times K}x_K = \begin{pmatrix} \sum_{q \in I} m_{i_1 q}x_q + \sum_{q \in K} m_{i_1 q}x_q \\ \vdots \\ \sum_{q \in I} m_{i_i q}x_q + \sum_{q \in K} m_{i_i q}x_q \end{pmatrix}$$

Und nach Gleichung (3) erhalten wir:

$$M_{I \times I} x_I + M_{I \times K} x_K = \begin{pmatrix} \sum_{q \in I} m_{i_1 q} x_q + \sum_{q \in K} m_{i_1 q} x_q \\ \vdots \\ \sum_{q \in I} m_{i_i q} x_q + \sum_{q \in K} m_{i_i q} x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analog findet man dieselbe Gleichung für J . Somit sind die Gleichungen

$$M_{I \times I} x_I + M_{I \times K} x_K = 0$$

$$M_{J \times J} x_J + M_{J \times K} x_K = 0$$

bewiesen. (Wir schreiben der Einfachheit halber 0, meinen aber eigentlich den Nullvektor $\vec{0}$.)

Als nächstes definieren wir:

$$\lambda := \frac{z_I^T x_I}{z_J^T x_J}$$

wobei z ein Eigenvektor mit einem negativen Eigenwert der Matrix M ist und z^T der transponierte Vektor von z ist. (Ein Transponierter Vektor mit einem anderen Vektor multipliziert ergibt durch Matrix-Multiplikation eine 1×1 -Matrix - also eine Zahl. Demzufolge ist $\lambda \in \mathbb{R}$.) Zusätzlich nehmen wir noch an, dass der Eigenvektor $z > 0$ ist. Dies können wir dank des Perron-Frobenius-Satzes annehmen [1]. Zusätzlich definieren wir noch einen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$, für dessen Einträge gelten:

$$y_i := x_i \text{ falls } i \in I, \quad y_i := -\lambda x_i \text{ falls } i \in J, \quad y_i = 0 \text{ falls } i \notin I \cup J$$

Wir können mithilfe dieser Definition von y sagen, dass:

$$z^T y = z_I^T x_I - \lambda z_J^T x_J$$

da $z^T y = z_I^T y_I + z_J^T y_J$ und $y_I = x_I$, $y_J = -\lambda x_J$. Weil $\lambda := \frac{z_I^T x_I}{z_J^T x_J} \Rightarrow z_I^T x_I = \lambda z_J^T x_J$ ist

$$z^T y = z_I^T x_I - \lambda z_J^T x_J = \lambda z_J^T x_J - \lambda z_J^T x_J = 0.$$

Ebenfalls haben wir:

$$y^T M y = y_I^T M_{I \times I} y_I + y_J^T M_{J \times J} y_J = x_I^T M_{I \times I} x_I + \lambda^2 x_J^T M_{J \times J} x_J$$

Durch die Gleichungen (1) und (2) wissen wir:

$$M_{I \times I} x_I = -M_{I \times K} x_K$$

$$M_{J \times J} x_J = -M_{J \times K} x_K.$$

Und somit erhalten wir auch den Ausdruck

$$y^T M y = -x_I^T M_{I \times K} x_K - \lambda^2 x_J^T M_{J \times K} x_K$$

Alle Einträge von $M_{I \times K}$ und $M_{J \times K}$ sind kleiner oder gleich null, denn alle Einträge von M sind per Definition von M kleiner oder gleich null, wenn sie nicht auf der Diagonalen liegen. Keine

Einträge von $M_{I \times K}$ und $M_{J \times K}$ liegen aber auf der Diagonalen, da $\text{supp}_+(x) \cap \text{supp}_-(x) = \emptyset$. Auch sind alle Einträge von x_I^T und x_J^T positiv, da I und J Teilmengen von $\text{supp}_+(x)$ und somit alle ihre Elemente sicher grösser als 0 sind. Der Vektor x_K hat hingegen nur negative Einträge, da $K := \text{supp}_-(x)$. Ausserdem ist λ keine komplexe Zahl, also $\lambda^2 > 0$. Somit können wir mit Sicherheit sagen:

$$y^T M y = -x_I^T M_{I \times K} x_K - \lambda^2 x_J^T M_{J \times K} x_K \leq 0$$

Wir haben also folgendes:

$$y^T M y \leq 0 \quad \text{und} \quad z^T y = 0$$

Diese zwei Ausdrücke implizieren nun, dass $M y = 0$ gelten muss. Um diese Implikation zu beweisen, brauchen wir abermals ein Zwischenresultat: Wir wissen, dass die Eigenvektoren der Matrix M eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bilden. Dies können wir leicht beweisen, da die Matrix M selbstadjungiert ist, das heisst es gilt: $M^T = M$. Diese Eigenschaft hat die Matrix M , da sie per Definition symmetrisch ist. Seien nun v_i und v_j zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten μ_i und μ_j . Nun gilt:

$$\mu_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle \mu_i v_i, v_j \rangle = \langle M v_i, v_j \rangle$$

(Wir verwenden hier die Notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Skalarprodukt zweier Vektoren.) Durch die Selbstadjungiertheit von M wissen wir, dass

$$\langle M v_i, v_j \rangle = (M v_i)^T v_j = v_i^T M^T v_j = v_i^T (M v_j) = \langle v_i, M v_j \rangle$$

gilt. Und somit erhalten wir:

$$\mu_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_i, M v_j \rangle = \langle v_i, \mu_j v_j \rangle = \mu_j \langle v_i, v_j \rangle.$$

Da aber die zwei Eigenwerte μ_i und μ_j mit Sicherheit verschieden sind, muss gelten:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \Rightarrow \text{Die beiden Eigenvektoren stehen orthogonal zueinander.}$$

Jetzt, da wir bewiesen haben, dass die Eigenvektoren von M eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bilden, können wir mit der Implikation

$$y^T M y \leq 0 \quad \text{und} \quad z^T y = 0 \quad \Rightarrow \quad M y = 0$$

fortfahren. Da die Eigenvektoren von M eine Orthonormalbasis bilden, können wir den Vektor y als Linearkombination der Eigenvektoren von M schreiben.

$$y = y_z z + y_+ v_+ + y_0 v_0$$

Wobei hier y_z , y_+ und y_0 die jeweiligen Komponenten von y in Richtung von z , allen Eigenvektoren mit positiven Eigenwerten v_+ und allen Eigenvektoren v_0 mit Eigenwert 0 sind. Wir nehmen nun das Zwischenresultat $z^T y = 0$ zur Hand um zu zeigen, dass y keine Komponenten in die Richtung des einzigen Eigenvektors mit negativem Eigenwert z hat.

$$z^T y = \langle z, y \rangle = 0$$

Durch die Aufteilung von y in eine Linearkombination der Eigenwerte können wir schreiben:

$$\langle z, y \rangle = \langle z, y_z z + y_+ v_+ + y_0 v_0 \rangle = \langle z, y_z z \rangle + \langle z, y_+ v_+ \rangle + \langle z, y_0 v_0 \rangle = 0.$$

Und da die Eigenvektoren eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bilden, sind $\langle z, y_+ v_+ \rangle$ und $\langle z, y_0 v_0 \rangle$ gleich Null. Somit erhalten wir zum Schluss

$$\langle z, y_z z \rangle = y_z \langle z, z \rangle = 0 \Rightarrow y_z = 0,$$

was zeigt, dass y keine Komponenten in die Richtung des Eigenvektors z hat. Wir erhalten mit diesem Resultat nun:

$$\begin{aligned} y^T M y &= y^T M (y_z z + y_+ v_+ + y_0 v_0) = y^T (M y_+ v_+) = y^T (y_+ \lambda_+ v_+) \leq 0 \\ y^T (y_+ \lambda_+ v_+) &= y_+ \lambda_+ (y^T v_+) = y_+ \lambda_+ ((y_z z + y_+ v_+ + y_0 v_0)^T v_+) = \\ y_+ \lambda_+ ((y_+ v_+ + y_0 v_0)^T v_+) &= y_+ \lambda_+ (y_+ \langle v_+, v_+ \rangle + y_0 \langle v_0, v_+ \rangle) = y_+^2 \lambda_+ \langle v_+, v_+ \rangle \leq 0 \end{aligned}$$

Schliesslich erhalten wir folgende Ungleichung:

$$y_+^2 \lambda_+ \|v_+\|^2 \leq 0$$

Allerdings sind hier y_+^2 und λ_+ per Definition schon positiv und $\|v_+\|^2$ ist offensichtlich auch für jeden beliebigen Vektor v_+ positiv oder null. Wir haben also $0 \leq y_+^2 \lambda_+ \|v_+\|^2 \leq 0$, was impliziert, dass

$$y^T M y = 0.$$

Dieses Resultat kann allerdings nur stimmen, wenn $M y = 0$. Dies, weil

$$y^T M y = \sum_{q=1}^n y_q \left(\sum_{k=1}^n y_k m_{qk} \right) = \sum_{q=1}^n \left(\sum_{k=1}^n y_q y_k m_{qk} \right) = 0$$

Wir wissen, dass die einzelnen Summanden $y_q y_k m_{qk}$ sicher gleich Null sind, wenn $k, q \notin I \cup J$. Wir wissen zudem, dass $m_{qk} = 0$ wenn $q \in I$ und $k \in J$. Dies gilt auch umgekehrt, denn die Matrix M ist symmetrisch ($m_{ij} = m_{ji}$, denn falls $i \sim j$ ist sicher auch $j \sim i$). Die einzigen Summanden $y_q y_k m_{qk}$, die nicht sowieso schon gleich null sind, erhalten wir, wenn $k, q \in I$ oder $k, q \in J$. Wenn wir aber $k, q \in I$ oder $k, q \in J$ haben, dann ist $y_q y_k > 0$ und $m_{qk} < 0$. Die einzelnen Summanden sind dann also strikt negativ. Die einzige Möglichkeit, wie die Gleichung $\sum_{q=1}^n \left(\sum_{k=1}^n y_q y_k m_{qk} \right) = 0$ stimmen kann ist, wenn $\sum_{k=1}^n y_k m_{qk} = 0 \quad \forall q \in \{1, \dots, n\}$. Dies impliziert aber, dass $M y = 0$, denn

$$M y = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n y_k m_{1k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n y_k m_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir nun das Resultat $M y = 0$ haben, wissen wir, dass $y \in \text{kern}(M)$. Doch da der Support von y sicher eine Teilmenge des Supports von x ist, aber zu $y \in \text{kern}(M)$ mit $\text{supp}(y) \subseteq \text{supp}(x)$ nicht zwingend $\text{supp}(y) = \text{supp}(x)$ gilt, ist der Support von x nicht minimal, wie angenommen. Wir haben also einen Widerspruch. Die Graphen $\langle \text{supp}_+(x) \rangle$ und $\langle \text{supp}_-(x) \rangle$ sind also sicher zusammenhängend, denn sonst erhält man den oben genannten Widerspruch. Das Lemma 1 ist bewiesen. \square

Mithilfe dieses Lemmas können wir nun den eigentlichen Beweis des Theorems 1.1 (iii) durchführen.

Theorem 1.1 (iii) $\mu(G) \leq 3$, falls G planar ist.

Beweis:

Zunächst nehmen wir an, dass der Graph G maximal planar ist. Ein Graph ist dann maximal planar (auch genannt: trianguliert *engl: triangulated*), wenn er nicht-planar wird, sobald man eine beliebige Kante hinzufügt. Maximal planare Graphen sind dreifach zusammenhängend (oder kurz: 3-zusammenhängend). Ein Graph G ist allgemein k -zusammenhängend, wenn man mindestens k Knotenpunkte des Graphen löschen muss, um den Graphen G in zwei Teilgraphen zu teilen, die disjunkt sind. Bei maximal planaren Graphen muss man also mindestens 3 Knotenpunkte löschen, um den Graphen in zwei disjunkte Teilgraphen zu zerteilen. Zudem können wir nach Mengers Theorem [9] sagen, dass in einem 3-zusammenhängenden Graphen drei knoten-disjunkte Pfade existieren, die zwei beliebige, nicht durch eine Kante verbundene Knotenpunkte verbinden. Mit *knoten-disjunkten Pfaden* sind hier Pfade $P_1 \dots P_n$ in einem Graphen gemeint, bei denen ein Pfad P_i keine Knotenpunkte enthält, die bereits schon in einem anderen Pfad P_j enthalten sind. Ausnahmen sind natürlich die Anfangs- und Endknotenpunkte von den jeweiligen Pfaden.

Auch wissen wir, dass jede Fläche in einem maximal planaren Graph ein Dreieck ist. Diese Tatsache ist leicht nachzuvollziehen, man kann diese Aussage durch Widerspruch beweisen. Angenommen eine Fläche des maximal planaren Graphen sei kein Dreieck (begrenzt durch drei Kanten), sondern ein Viereck. Dies führt aber zu einem Widerspruch, denn man kann eine Kante hinzufügen (Diagonale des Vierecks), sodass der Graph immer noch planar ist. Diese Aussage liesse sich noch genauer durch Induktion beweisen: Sei P^n ein n -Polygon und ein Teilgraph eines planaren Graphen G . Dieses Polygon begrenzt nun eine Fläche mit genau n Kanten. Wir nehmen nun als Induktionsannahme, dass wir die durch das Polygon begrenzte Fläche in Dreiecke "aufteilen" können, indem wir Kanten hinzufügen und noch nicht verbundene Knotenpunkte des Polygons verbinden. Der dann erhaltene Teilgraph $\overline{P^n}$ ist sicher planar, da sich keine neuen Kanten schneiden. Dann können wir mit Sicherheit auch sagen, dass wir das Polygon P^{n+1} in Dreiecke aufteilen können: sei $\overline{P^n}$ das in Dreiecke aufgeteilte n -Polygon. Fügen wir nun einen Knotenpunkt hinzu und verbinden ihn durch Kanten mit zwei Knotenpunkten des Polygons $\overline{P^n}$. Somit erhalten wir eine neue Fläche, welche ganz sicher ein Dreieck ist. Allerdings hat unser Polygon nun nicht mehr n Knotenpunkte, sondern $n + 1$. Wir haben nun also ein in Dreiecke aufgeteiltes Polygon mit $n + 1$ Knotenpunkten.

Wir nehmen als Induktionsanfang die triviale Tatsache, dass ein Viereck durch Hinzufügen einer Kante in Dreiecke aufgeteilt werden kann. Wie vorhin gesehen gilt: kann man P^n in Dreiecke aufteilen, so kann man sicher auch P^{n+1} in Dreiecke aufteilen. Wir haben somit einen Beweis durch Induktion dafür, dass jede beliebige Fläche, welche durch ein Polygon mit n Kanten begrenzt ist, in Dreiecksflächen aufgeteilt werden kann. Für den Beweis des Theorems 1.1 (iii) sei U die Menge der Knotenpunkte eines solchen Dreiecks.



Abb. 10: Eine durch vier Kanten begrenzte Fläche kann in zwei durch drei Kanten begrenzte Flächen geteilt werden.

Für den Beweis nehmen wir nun an, dass die Colin de Verdière Invariante für unseren maximal planaren Graphen G grösser als 3 ist. Das heisst $\mu(G) = \text{korang}(M) > 3$, wobei hier M eine optimale Colin de Verdière Matrix ist. Weil wir nun annehmen, dass $\mu(G)$ grösser als 3 ist, wissen wir, dass der Kern der Matrix M einen Vektor x enthält, für den gilt:

$$x_i = 0 \quad \text{wenn} \quad i \in U.$$

Um zu sehen, dass dies stimmt, betrachten wir den Rangsatz für Matrizen:

$$\dim(\text{kern}(M)) = \dim(M) - \text{rang}(M)$$

Wir wissen sicher, dass $\dim(M) = n$ und nach der Annahme $\mu(G) = \text{korang}(M) > 3$ ist $\text{rang}(M) \leq n - 4$. Wir betrachten nun den grösstmöglichen Rang, den die Matrix M nach Annahme haben kann, also $n - 4$. Um dann zu zeigen, dass ein Vektor $x \in \text{kern}(M)$ existiert mit $x_i = 0 \quad \forall i \in U$, müssen wir zeigen, dass $\dim(\text{kern}(M)) > 0$ gilt wenn $x_i = 0 \quad \forall i \in U$. Wir definieren in diesem Sinne die Matrix \overline{M} als die Matrix M , in der die i 'ten Spalten und Zeilen gelöscht wurden, wobei hier ebenfalls $i \in U$ sind. Wir wissen dann, dass $\dim(\overline{M}) = n - 3$ ist. Wir nehmen an, dass der Rang von \overline{M} gleich bleibt, wie der von M - falls er kleiner ist als M , hält das nachfolgende Argument ebenfalls. Wir erhalten also durch den Rangsatz:

$$\dim(\text{kern}(\overline{M})) = \dim(\overline{M}) - \text{rang}(\overline{M}) = (n - 3) - (n - 4) = 1$$

Wir wissen also mit Sicherheit:

$$1 \leq \dim(\text{kern}(\overline{M})).$$

Wenn \overline{x} der Vektor x ist, in dem die Komponenten x_i mit $i \in U$ gelöscht wurden, so gilt somit sicher

$$\overline{M}\overline{x} = 0$$

Da aber das Löschen der i 'ten Spalten und Zeilen von M nichts an der Gleichung $Mx = 0$ ändert, wenn $x_i = 0$ gilt, muss auch die Gleichung $Mx = 0$ erfüllt sein, wenn $x_i = 0 \quad \forall i \in U$. Dies beweist, dass ein solcher Vektor mit $x_i = 0$ im Kern der Matrix M enthalten sein muss. Wir bemerken kurz noch, dass dies nicht erfüllt wäre, wenn $\mu(G) \leq 3$, denn dann wäre der grösstmögliche Rang $\text{rang}(M) = n - 3$. Mit dem Rangsatz wäre dann $\dim(\text{kern}(\overline{M})) = \dim(\overline{M}) - \text{rang}(\overline{M}) = (n - 3) - (n - 3) = 0$. Da die Dimension des Kerns Null ist, könnte $x \in \text{kern}(M)$ nicht gelten.

Wie vorhin bereits erwähnt, existieren - aufgrund der Tatsache das G 3-zusammenhängend ist - drei knoten-disjunkte Pfade P_1, P_2, P_3 , wobei jeder dieser Pfade in einem Knotenpunkt

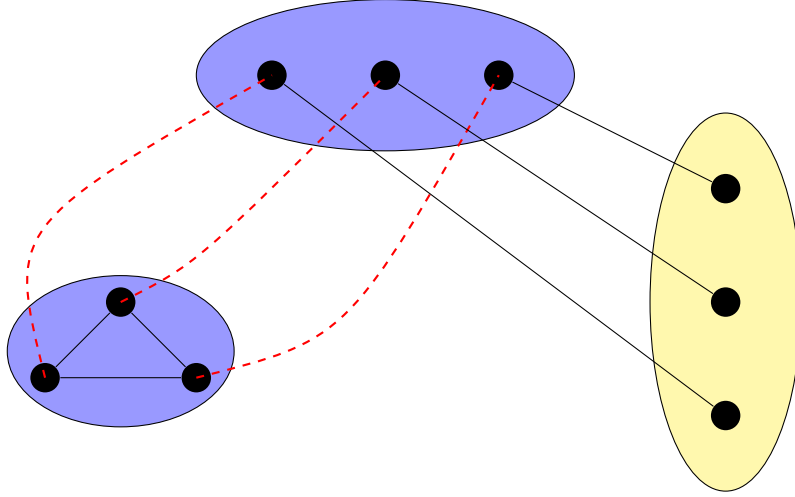


Abb. 11: Der Graph G schematisch dargestellt: Das Dreieck U , die Pfade P_1, P_2, P_3 (Rot), die Menge aller $v_i \notin \text{supp}(x)$ (Blau) und die Menge aller $v_i \in \text{supp}(x)$ (Gelb).

$v_1, v_2, v_3 \notin \text{supp}(x)$ startet, der mit mindestens einem Knotenpunkt $\in \text{supp}(x)$ verbunden ist. Alle Pfade P_1, P_2, P_3 enden in einem Knotenpunkt des Dreiecks U .

Wir wissen zudem, dass wenn ein Knotenpunkt $v_i \notin \text{supp}(x)$ verbunden mit einem Knotenpunkt $v_j \in \text{supp}_+(x)$ ist, so ist v_i sicher auch mit einem Knotenpunkt $v_k \in \text{supp}_-(x)$ verbunden. Diese Tatsache folgt aus der Voraussetzung $Mx = 0$. Man kann dies abermals durch Widerspruch zeigen. Wir nehmen an, es gibt einen Knotenpunkt v_i mit $v_i \sim v_j$, wobei $i \notin \text{supp}(x)$ und $j \in \text{supp}_+(x)$. Zugleich gibt es aber keinen Knotenpunkt v_p , sodass $v_i \sim v_p$ und $p \in \text{supp}_-(x)$. Durch die Gleichung $Mx = 0$ wissen wir, dass

$$Mx = \begin{pmatrix} \sum_k m_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_k m_{nk}x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also $\sum_k m_{qk}x_k = 0$ für beliebige q aus $\{1, \dots, n\}$. Wir wissen zudem durch die vorherige Annahme "Es gibt keinen Knotenpunkt v_p , sodass $v_i \sim v_p$ mit $p \in \text{supp}_-(x)$ und $i \notin \text{supp}(x)$ ", dass die Summe $\sum_k m_{qk}x_k$ mit $k \in \text{supp}_-(x), q \notin \text{supp}(x)$ gleich Null sein muss. Dies weil $m_{qk} = 0$ nach der Definition von M gilt, wenn $v_q \not\sim v_k$. Wir wissen aber auch, dass alle Summen $\sum_k m_{qk}x_k$ mit $q \notin \text{supp}(x)$ gleich Null sein müssen. Sei nun der Einfachheit halber $I = \text{supp}_+(x)$, $J = \text{supp}_-(x)$ und $K = \{i \mid i \notin \text{supp}_-(x) \cap \text{supp}_+(x)\}$. Diese Summen lassen sich umschreiben in

$$\sum_{k \in I, q \in K} m_{qk}x_k + \sum_{k \in J, q \in K} m_{qk}x_k + \sum_{k \in K, q \in K} m_{qk}x_k = 0.$$

Wie vorhin schon gesehen, ist die Summe $\sum_{k \in J, q \in K} m_{qk}x_k$ sicher nach der Annahme gleich Null. Die Summe $\sum_{k \in K, q \in K} m_{qk}x_k$ ist sicher auch gleich Null, denn $x_k = 0$ falls $k \in K$. Dann muss allerdings

$$\sum_{k \in I, q \in K} m_{qk}x_k = 0$$

gelten, was aber der Annahme: "Wir nehmen an, es gibt einen Knotenpunkt v_i mit $v_i \sim v_j$ wobei $i \notin \text{supp}(x)$ und $j \in \text{supp}_+(x)$ " widerspricht. Nach dieser müsste es nämlich mindestens einen Term der Summe $\sum_{k \in I, q \in K} m_{qk}x_k$ geben, der nicht gleich Null ist. Das führt zum Widerspruch

mit der oben erhaltenen Gleichung. Dies gilt logischerweise auch für den umgekehrten Fall; wenn ein Knotenpunkt $\notin \text{supp}(x)$ mit einem Knotenpunkt $\in \text{supp}_-(x)$ verbunden ist, so ist er sicher auch mit einem Knotenpunkt $\in \text{supp}_+(x)$ verbunden. Wir können also mit diesem Wissen die Abbildung 11 neu darstellen.

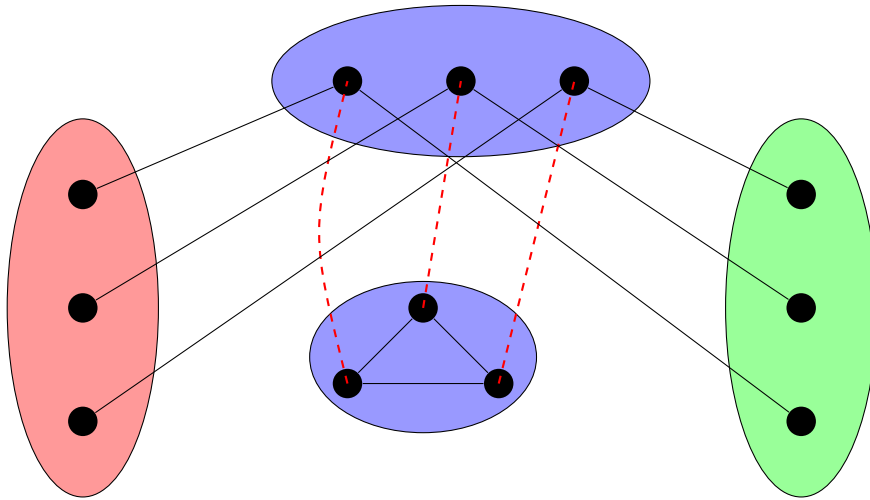


Abb. 12: Neue schematische Darstellung des Graphen G : Die Menge aller $v_i \in \text{supp}_+(x)$ (Grün), die Menge aller $v_i \in \text{supp}_-(x)$ (Rot) und die Menge aller $v_i \notin \text{supp}(x)$ (Blau) mit dem Dreieck U und den Pfaden P_1, P_2, P_3 .

Wie in Lemma 1 gezeigt werden konnte, sind die Teilgraphen $\langle \text{supp}_+(x) \rangle$ und $\langle \text{supp}_-(x) \rangle$ von G beides zusammenhängende Graphen. Wir können sie also im Graphen G zu jeweils einem Knotenpunkt kontrahieren. Der durch diese Kontraktion erhaltene Graph ist immer noch planar. Auf dieselbe Art und Weise können wir die einzelnen Pfade zu einem einzigen Knotenpunkt kontrahieren - wir kontrahieren die Pfade solange, bis deren Anfangspunkte auf den Endpunkten liegen. Wir addieren noch einen Knotenpunkt innerhalb des Dreiecks U und verbinden ihn mit allen Knotenpunkten in U . Schliesslich erhalten wir einen Graphen \bar{G} , der - nach Annahme - immer noch planar ist und folgendermassen aussieht:

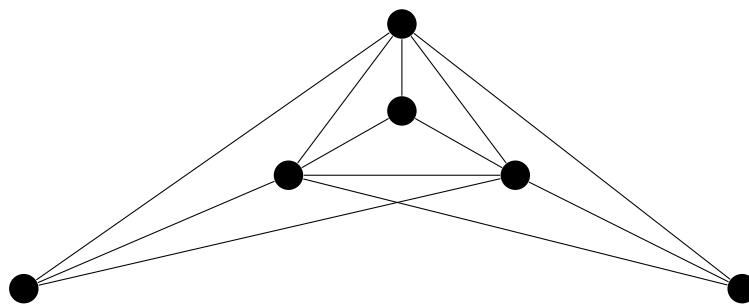
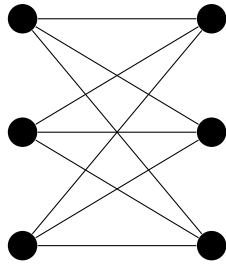


Abb. 13: Der durch Kontraktion von G erhaltene Graph \bar{G} .

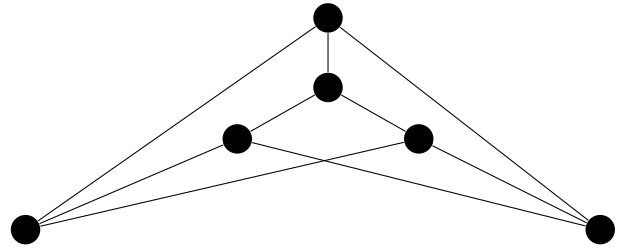
Wie wir hier aber unschwer erkennen können, hat dieser Graph den bipartiten Graphen $K_{3,3}$ als Teilgraph. Wenn wir noch dazu die Kanten des Dreiecks U löschen, so erhalten wir einen zu $K_{3,3}$ identischen Graphen.

Wir haben also das Resultat, dass der Graph G durch und Kontraktion und Löschen von Kanten auf den Graphen aus Abbildung 13 Reduziert werden kann. Dieser Graph hat dann allerdings, wie man in Abbildung 14 erkennen kann, den bipartiten Graphen $K_{3,3}$ als Teilgraph. Allerdings konnten wir in Theorem 3.2 zeigen, dass der Graph $K_{3,3}$ sicher nicht planar ist.

Wir erhalten dadurch aber einen Widerspruch.



(a) Der bipartite Graph $K_{3,3}$.



(b) \bar{G} mit den Kanten aus U gelöscht.

Abb. 14: Man erkennt leicht, dass die beiden Graphen identisch sind.

Wir haben angenommen, dass der Graph G planar ist, doch da er nach Reduktion auf den Graphen \bar{G} offensichtlich den Graphen $K_{3,3}$ als Teilgraph hat, kann \bar{G} und somit letztlich G nicht planar sein. Wir haben also einen Widerspruch und somit bewiesen, dass die Aussage

$$G \text{ ist planar} \quad \text{und} \quad \mu(G) = \text{korang}(M) > 3$$

zu einem Widerspruch führt und somit nicht stimmen kann. Wir wissen also mit Sicherheit:

$$G \text{ ist planar} \quad \iff \quad \mu(G) \leq 3.$$

Das Theorem 1.1 (iii) ist somit bewiesen. \square

5 Grapheneinfärbungen und die Chromatische Zahl

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einer populären Disziplin in der Graphentheorie: dem Einfärben von Graphen. Wie auch im vorhergehenden Teil der Arbeit betrachten wir hier nur ungerichtete Graphen ohne mehrfache Kanten und ohne Kanten der Form $e_i = \{v_i, v_i\}$. Allgemein wird in der Graphentheorie zwischen drei verschiedenen Arten von Graphen-Einfärbungen gesprochen: das Einfärben von Flächen, das Einfärben von Knotenpunkten und das Einfärben von Kanten. Im Hinblick auf das Vier-Farben Problem, auf das im nächsten Kapitel eingegangen wird, werden wir mit dem Einfärben von Flächen beginnen.

5.1 Einfärben von Flächen

Wir betrachten zunächst einen beliebigen planaren Graphen G . Mit einer Färbung der Flächen dieses Graphen meinen wir dann eine Zuordnung $c : F(G) \rightarrow C$, wobei hier $F(G)$ die Menge aller Flächen des Graphen G und C eine Menge mit verschiedenen Farben ist. Um eine valide Färbung des Graphen zu erhalten, stellen wir zudem noch die Bedingung auf, dass zwei Flächen, die sich mindestens eine Kante teilen, nicht die gleiche Farbe zugeordnet werden darf. Im Beispiel aus Abbildung 17 wäre die Zuordnung

$$f_1 \mapsto \text{Rot}, \quad f_2 \mapsto \text{Grün}, \quad f_3 \mapsto \text{Blau}, \quad f_4 \mapsto \text{Gelb}$$

eine valide Einfärbung der Flächen des Graphen G . Üblicherweise wird für die Menge C auch oft die Menge $\{1, \dots, k\}$ verwendet, wobei unterschiedliche Zahlen unterschiedliche Farben repräsentieren.

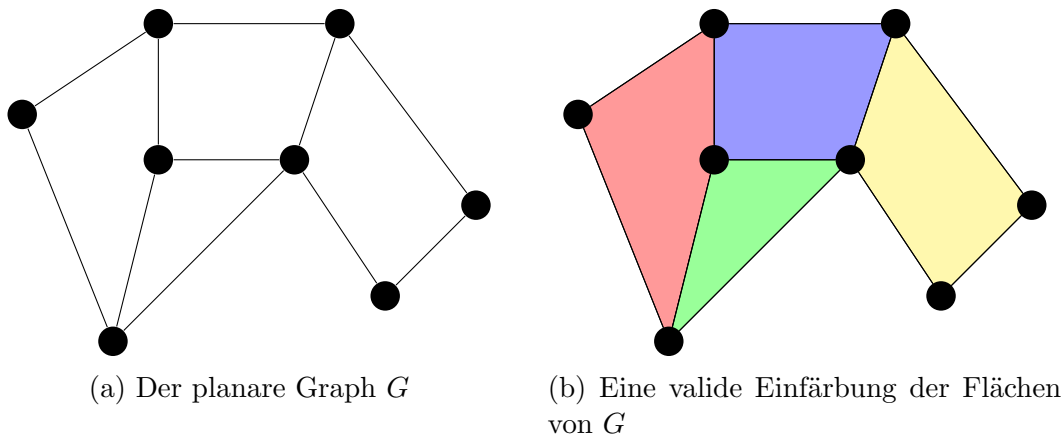


Abb. 15

Allerdings ist diese Färbung längst nicht die einzige Möglichkeit den Graphen valide einzufärben. Wir können leicht erkennen, dass wir ebenfalls eine valide Färbung des Graphen erhalten würden, wenn wir in Abbildung 15(b) die gelbe Fläche rot einfärben würden. Wir sehen auch, dass wir auf diese Weise sogar weniger unterschiedliche Farben verwenden müssen. So kommen wir auch schon auf die Grundfrage der Disziplin des Graphen-Färbens: Wie viele unterschiedliche Farben brauchen wir mindestens um die Flächen eines Graphen valide einzufärben? Bevor wir allerdings näher auf diese Frage eingehen, betrachten wir noch einige Fälle bei denen das Einfärben der Flächen suboptimal oder gar nicht wirklich sinnvoll ist. Ein Beispiel dafür wäre das Flächen-Einfärben von Bäumen. Da Bäume per Definition keinen Zyklus enthalten - also keinen Kantenzug, bei dem Anfangs- und Endpunkte gleich sind - werden durch diese

Bäume, bis auf die Umgebungsfläche, gar keine Flächen begrenzt. Üblicherweise wird aber die Umgebungsfläche nicht eingefärbt. Zuvor haben wir angenommen, der einzufärbende Graph sei

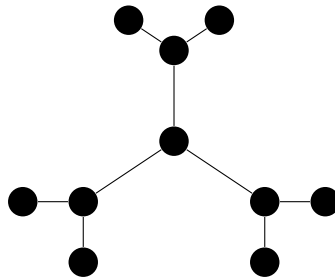


Abb. 16: Eine Flächeneinfärbung eines Baumes ist (bis auf die Umgebungsfläche) gar nicht möglich, da der Baum per Definition keine Flächen einschliesst.

planar; doch was macht man, wenn dem nicht so ist? Allein das Unterscheiden verschiedener Flächen wird schwierig, wenn es keine planare Einbettung des zu betrachtenden Graphen gibt.

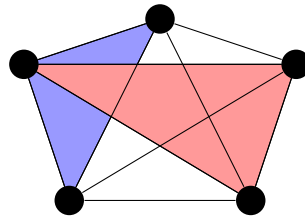


Abb. 17: In einem nonplanaren Graphen wie K_5 überlappen sich einzelne (oder alle) Flächen, wenn der Graph in der Ebene dargestellt wird. Das Einfärben der Flächen des Graphen macht nun keinen Sinn, da alle Flächen "übereinander" liegen.

Doch wie wir aus dem Theorem 1.1 bereits wissen, können wir Graphen die nicht planar sind in andere Flächen wie zum Beispiel den Torus oder die Klein'sche Flasche einbetten, ohne dass sich eine oder mehrere Kanten zwingend schneiden müssen. Wie wir wissen ist die Colin de Verdière Invariante des Graphen $\mu(K_5) = 4$ und nach Theorem 1.1 (iv) wissen wir, dass der Graph K_5 linklos in \mathbb{R}^3 einbettbar ist. Bei dieser Einbettung schneiden sich daher keine Kanten und dadurch überlappen sich die Flächen des K_5 auch nicht gegenseitig. Wir können somit eine valide Flächen-Färbung des Graphen erreichen.

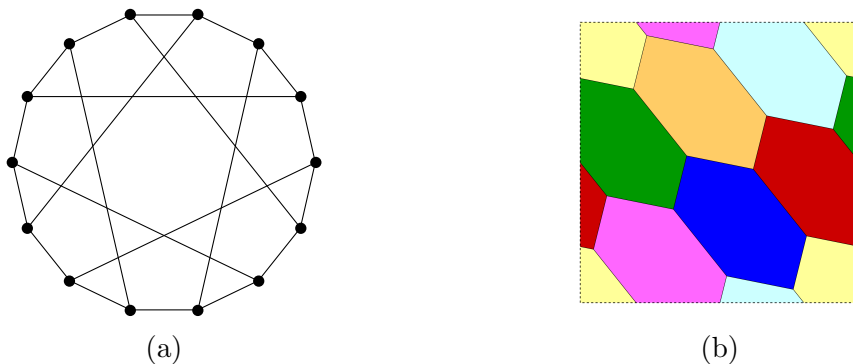


Abb. 18: Der Heawood Graph und seine Einbettung in den Torus. Dieser wurde als Quadrat dargestellt, bei dem die obere mit der unteren Kante, sowie die linke mit der rechten Kante identifiziert wurde. Die jeweiligen Kantenpaare wurden in dieselbe Richtung identifiziert.

Ein anderes Beispiel für Flächen-Einfärbungen von nonplanaren Graphen wäre auch noch der *Heawood Graph*. Dieser Graph ist ein sogenannter Toroidalgraph - er lässt sich also in den Torus einbetten, ohne dass sich zwei Kanten schneiden. Wie wir in Abbildung 18 sehen, kann man bei der Einbettung des Heawood Graphen in den Torus die Flächen valide einfärben. Allerdings gestaltet sich das Flächen-Einfärben der Einbettungen von Graphen meist sehr umständlich, nicht sehr anschaulich und teilweise sogar sinnlos (bei Bäumen), daher werden in der Graphentheorie häufig andere Einfärbungsmethoden bevorzugt. Die wohl üblichste Einfärbungsmethode ist die Knotenpunkt-Einfärbung.

5.2 Einfärben von Knotenpunkten

Wie beim Einfärben von Flächen ist das Einfärben von Knotenpunkten eine Zuordnung $c : V(G) \rightarrow C$, wobei $V(G)$ die Menge aller Knotenpunkte des Graphen G ist. Eine valide Einfärbung eines Graphen G erhalten wir nun, wenn keine zwei Knotenpunkte die direkt durch eine Kante verbunden sind die gleiche Farbe haben. Also falls $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ so muss $c(v_i) \neq c(v_j)$ gelten. Die Vorteile des Knotenpunkt-Einfärbens gegenüber dem Flächen-Einfärben erkennt man leicht. Das Einfärben der Knotenpunkte geht problemlos, auch wenn sich zwei oder mehrere Kanten des Graphen schneiden. Man muss also nicht zuerst eine Einbettung eines Graphen finden, um seine Knotenpunkte valide einzufärben. Auch das Einfärben der Knotenpunkte eines Baumes stellt kein Problem dar:

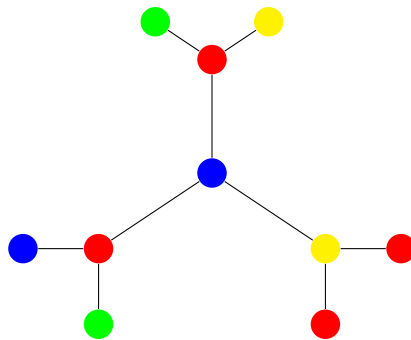


Abb. 19: Das valide Knotenpunkt-Einfärben eines Baumes gestaltet sich, im Gegensatz zu einer Flächeneinfärbung, sehr leicht und ohne Probleme.

Eine weitere nützliche Eigenschaft von Knotenpunkt-Einfärbungen ist, dass man durch sie auch eine Flächeneinfärbung eines Graphen darstellen kann. Nehmen wir als Beispiel die Flächeneinfärbung des Graphen aus Abbildung 15. Wir fügen nun innerhalb jeder Fläche einen Knotenpunkt hinzu, der die gleiche Farbe wie die Fläche zugeordnet bekommt. Wir gestalten nun mit den neu hinzugefügten Knotenpunkte einen neuen Graphen: Wenn sich zwei Flächen im ursprünglichen Graphen berühren (mindestens eine Kante teilen), so verbinden wir die neu hinzugefügten Knotenpunkte innerhalb der jeweiligen Flächen. Den Graph, den wir auf diese Weise erhalten, nennt sich der Dualgraph zum ursprünglichen Graphen.

In Abbildung 20(b) wurde der Exaktheit halber noch ein Knotenpunkt für die Umgebungsfläche hinzugefügt. Da die Umgebungsfläche alle anderen Flächen berührt, ist dieser Knotenpunkt auch mit allen anderen Knotenpunkten verbunden. Da allerdings für Flächenfärbungen die Umgebungsfläche häufig weggelassen wird, kann auch dieser Knotenpunkt weggelassen werden.

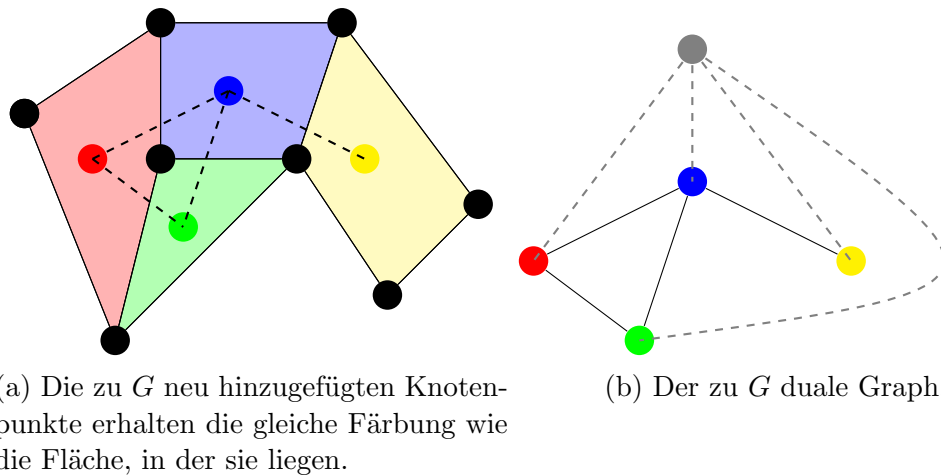


Abb. 20

Der duale Graph ist nun die "Übersetzung" der validen Flächeneinfärbung von G in eine valide Knotenpunkteinfärbung.

5.3 Einfärben von Kanten

Da das Einfärben von Kanten für diese Arbeit nicht wirklich von Relevanz ist, werden wir nur kurz der Vollständigkeit halber darauf eingehen. Wie bei Knotenpunkt- und Flächeneinfärbungen ist das Einfärben von Kanten eine Zuordnung $c : E(G) \rightarrow C$, wobei $E(G)$ die Menge aller Kanten des Graphen G ist. Eine valide Kanteneinfärbung erhalten wir dann, wenn Kanten die im gleichen Knotenpunkt enden nicht die gleiche Farbe zugeordnet bekommen. Also falls $e_1 = \{v_i, v_j\}$ und $e_2 = \{v_i, v_k\}$ gilt $c(e_1) \neq c(e_2)$. Auch eine Kanteneinfärbung kann in eine Knotenpunktfärbung "übersetzt" werden. Dazu fügt man einen neuen Knotenpunkt auf jede Kante zu, welcher die gleiche Farbe zugeordnet kriegt, wie die Kante auf der er liegt. Enden (oder beginnen) zwei Kanten im gleichen Knotenpunkt, so verbinden wir die neu hinzugefügten Knotenpunkte miteinander.

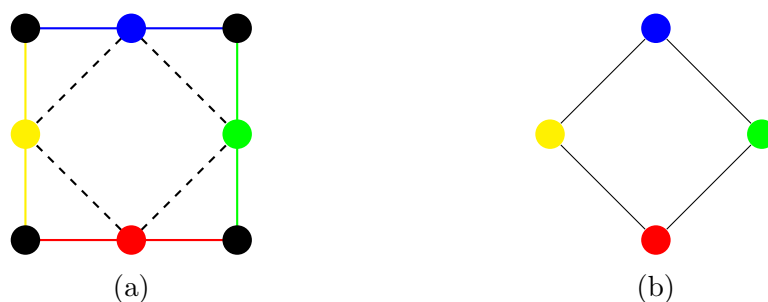


Abb. 21: Eine Übersetzung einer validen Kanteneinfärbung eines Graphen in eine valide Knotenpunkteinfärbung.

Ausserdem müssen wir beim Einfärben von Kanten - wie beim Einfärben von Knotenpunkten - nicht darauf achten, dass sich keine Kanten schneiden. Zwar berühren sich zwei Kanten dann, aber die Voraussetzung für eine valide Kanteneinfärbung kann trotzdem erfüllt sein. Dies weil wir als Voraussetzung gewählt haben, dass zwei Kanten unterschiedliche Farben haben müssen, wenn sie im selben Knotenpunkt enden. Wir müssen hier also auch nicht zuerst eine Einbettung des Graphen finden, um seine Kanten sinnvoll einzufärben.

5.4 Die Chromatische Zahl

5.4.1 Definition der Chromatischen Zahl

Wie wir bereits in Kapitel 4.1 gesehen haben, ist eine grundlegende Frage in der Disziplin des Graphen-Einfärbens, wie viele Farben man mindestens braucht, um einen Graphen valide einzufärben. Wir betrachten hierbei von nun an nur valide Knotenpunkteinfärbungen und nennen sie der Einfachheit halber einfach nur *Färbungen*. Wir sagen zudem, ein Graph sei *k-einfärbbar*, wenn eine Färbung mit k Farben existiert. Somit kommen wir zu der Definition der sogenannten Chromatischen Zahl:

Die Chromatische Zahl $\chi(G)$ eines Graphen G ist die kleinstmögliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die eine k -Einfärbung des Graphen G möglich ist.

Wir nennen Graphen die eine Chromatische Zahl k haben *k-Chromatisch*. Versuchen wir nun als Beispiele die Chromatischen Zahlen von zwei Graphen herauszufinden. Bei Graphen mit wenigen Knotenpunkten lässt sich die Chromatische Zahl noch "von Hand" und durch simples Versuchen des Einfärbens erarbeiten.

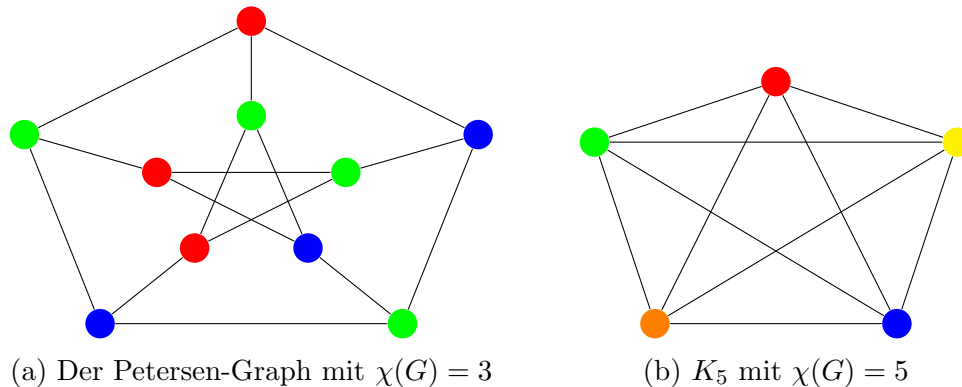


Abb. 22

Wie sich zeigt, ist so zum Beispiel die Chromatische Zahl des Petersen-Graphen gleich drei. In Abbildung 22(a) haben wir eine valide Färbung des Petersen-Graphen. Dass sich der Petersen-Graph nicht mit nur zwei Farben einfärben lässt, erkennt man leicht: Man betrachte das äussere Pentagon des Petersen-Graphen und versuche es mit nur zwei Farben einzufärben; man sieht, dass nur schon dieses Einfärben nicht möglich ist, da das Pentagon ein Zyklus mit einer ungeraden Anzahl an Knotenpunkten ist. Ebenfalls können wir die Chromatische Zahl des kompletten Graphen aus Abbildung 22(b) leicht finden: Da jeder Knotenpunkt mit jedem anderen Knotenpunkt verbunden ist, können zwei unterschiedliche Knotenpunkte gar nicht dieselbe Farbe haben. Was ebenfalls in Abbildung 22 auffällt ist, dass zwei Graphen, die sich auf den ersten Blick sehr ähnlich sehen, völlig unterschiedliche Chromatische Zahlen haben. Im Petersen-Graph erhalten wir durch das Kontrahieren der Kanten, die die Knotenpunkte des Pentagons mit den Knotenpunkten des Pentagramms verbinden, exakt den kompletten Graphen K_5 . Und doch steigt die Chromatische Zahl bei diesen Kontraktionen um zwei. Wir stellen also schon nach kurzem Betrachten der Chromatischen Zahl eines Graphen fest, dass die Berechnung derselben Zahl sich für sehr grosse Graphen als enorm schwierig gestaltet. Genau aus diesem Grund versucht man, obere (und auch untere) Grenzen für die Chromatische Zahl verschiedener Graphen zu finden [10].

6 Das Vier-Farben Problem

In diesem Kapitel betrachten wir eines der berühmtesten mathematischen Probleme der Geschichte: das Vier-Farben Problem. Wie auch bei vielen solch verbreiteten und allbekannten Problemen in der Mathematik, ist das Vier-Farben Problem schnell erklärt und die Definition ist auch für Menschen, die sich sonst nicht mit Mathematik befassen leicht verständlich. Dennoch täuscht man sich gewaltig, wenn man von der Simplizität der Problemdefinition auf einen ähnlich simplen Beweis schliesst. Neben den jahrelangen Knobeleyen vieler grosser Mathematiker und Mathematikerinnen und den grandiosen mathematischen Innovationen, die dieses Problem hervorgebracht hat, fokussieren wir uns in diesem Kapitel vor allem auf die Verbindung des Vier-Farben Problems mit der Colin de Verdière Invariante. Zum Schluss dieses Kapitels wird noch auf die jahrhundertelange Geschichte des Vier-Farben Problems und den geschichtsträchtigen Beweis von Kenneth Appel und Wolfgang Haken im Jahre 1976 eingegangen.

6.1 Definition des Vier-Farben Problems

Wie vorhin bereits erwähnt, gestaltet sich eine Definition des Vier-Farben Problems als äusserst simpel. Wir schauen - zumindest am Anfang - eine typische Landkarte an. Um solche Landkarten übersichtlicher zu gestalten, werden unterschiedliche Gebiete der Karte in verschiedenen Farben eingefärbt. Intuitiv kommen wir auf die Idee, dass benachbarte Gebiete eine andere Farbe haben müssen, um eine Gebietsgrenze überhaupt erkennbar machen zu können. Und schon sind wir mittendrin: wie im vorhergehenden Kapitel besprochen, handelt es sich hierbei um eine Flächeneinfärbung eines Graphen. Um klarzustellen, dass dies in der Tat eine Flächeneinfärbung eines Graphen ist, identifizieren wir die Gebietsgrenzen der Karte mit den Kanten in einem Graphen. Ebenso sind die einzelnen Gebiete der Karte die Flächen von diesem Graphen und die Punkte, in denen sich mindestens drei Gebietsgrenzen schneiden, ergeben die Knotenpunkte.

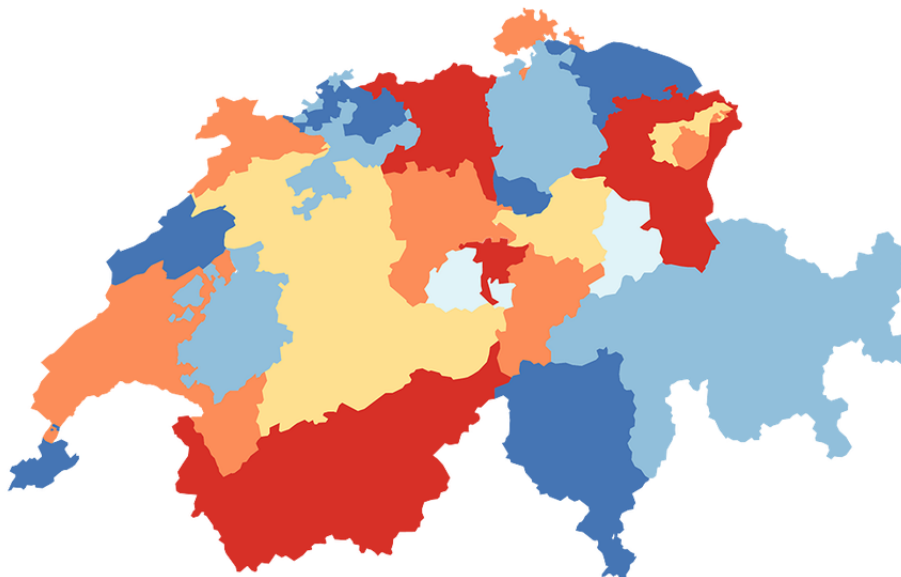


Abb. 23: Hier sehen wir eine (valide) Einfärbung einer Karte der Schweiz. Dabei entsprechen die Gebiete den einzelnen Kantonen der Schweiz.

Zum berühmten Vier-Farben Problem gelangen wir nun, indem wir wieder nach der minimalen Anzahl an Farben fragen, die es für eine valide Flächenfärbung einer beliebigen solchen Landkarte braucht. Die Schritte, die zu der Vermutung führen, dass es maximal vier Farben sein müssen, lassen sich leicht nachvollziehen; eine Karte die sich nur mit vier Farben einfärben lässt findet sich leicht, aber nach einer Karte für die man zwingend fünf Farben benötigt, sucht man lange.

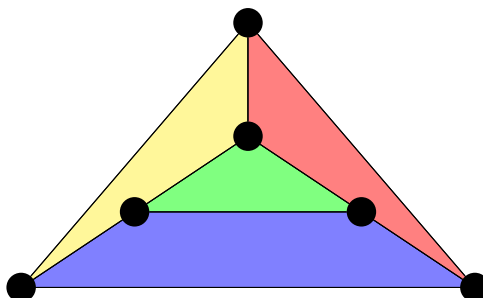


Abb. 24: Für diesen Graphen lässt sich keine valide Flächeneinfärbung mit weniger als vier Farben finden.

Somit erreichen wir eine erste Formulierung des Vier-Farben Problems.

Theorem 6.1.1

Jede beliebige Karte lässt sich mit maximal 4 Farben valide einfärben.

Wie wir aber in Kapitel 5.2 gesehen haben, kann jede valide Flächeneinfärbung in eine valide Knotenpunkteinfärbung übersetzt werden. Wir können also die Einfärbungen der Karten von vorhin als Knotenpunkteinfärbungen von Graphen sehen. Da man Karten im allgemeinen immer als planare Graphen repräsentieren kann, sind auch die dazugehörigen dualen Graphen planar. Somit können wir das Vier-Farben Problem mit Knotenpunkteinfärbungen schreiben. So zum Beispiel hat der duale Graph zu dem Graphen in Abbildung 24 den kompletten Graphen K_4 als Teilgraph, nicht aber K_5 oder $K_{3,3}$. Seine Chromatische Zahl ist also sicher gleich vier. Diese Definition des Vier-Farbenproblems durch Knotenpunkteinfärbungen ist deshalb nützlich, weil wir nicht zunächst über eine passende Einbettung des Graphen nachdenken müssen. Auch im Kontext dieser Arbeit ist diese Definition ideal; wir wissen, wie wir die Eigenschaft der Planarität eines Graphen mithilfe der Colin de Verdière Invariante charakterisieren können, wodurch wir im nächsten Kapitel dann den Zusammenhang der Colin de Verdière Invariante und dem Vier-Farben Problem darstellen können.

Theorem 6.1.2 *Das Vier-Farben Problem*

Jeder planare Graph G lässt sich mit maximal vier Farben einfärben.

Eine äquivalente Darstellung des Vier-Farben Problems können wir mithilfe der in Kapitel 5.4 eingeführten Chromatischen Zahl erreichen:

$$\chi(G) \leq 4 \quad \text{falls } G \text{ planar ist.} \tag{4}$$

Genau diese Darstellung werden wir jetzt im nächsten Kapitel brauchen.

6.2 Die Colin de Verdière Invariante und das Vier-Farben Problem

Dieses Kapitel ist - obwohl es im Vergleich zu den vorhergehenden Kapiteln eher kurz ausfällt und mathematisch relativ einfach zu verstehen ist - der zentrale Teil dieser Arbeit. Denn dieses Kapitel verbindet die Themenbereiche die wir in den vorhergehenden Kapiteln betrachtet haben. In den Kapiteln 2 - 4 haben wir die zentrale Eigenschaft der Colin de Veridère Invariante betrachtet: Die Colin de Verdière Invariante charakterisiert die Einbettbarkeit eines Graphen durch eine rein algebraische Definition. Sie verbindet also zwei Teilgebiete der Graphentheorie - die algebraische und die topologische Graphentheorie. Als Yves Colin de Verdère diese Graphen-Invariante in seiner Arbeit *Sur un Nouvel Invariant des Graphes et un Critère de Planarité* [3] zum ersten Mal präsentierte, stellte er zudem noch eine Vermutung auf, welche die Colin de Verdière Invariante ebenfalls noch mit Grapheneinfärbungen in Verbindung bringen würde. Genau diese Vermutung von Colin de Verdière ist das Verbindungsstück zwischen der Colin de Verdière Invariante und dem Vier-Farben Problem. Dazu wird eine Definition der Vermutung von Colin de Verdère geliefert und aufgezeigt, wie diese Vermutung das Vier-Farben Problem lösen würde. Zudem werden wir noch kurz auf die berühmte Hadwiger-Vermutung eingehen, da diese die Vermutung von Colin de Verdière beweisen würde. Diese Vermutung, die Colin de Verdière aufgestellt hat, lautet folgendermassen:

Vermutung 6.2.1

Für alle ungerichteten Graphen ohne mehrfache Kanten und ohne Kanten der Form $e_j = \{v_i, v_i\}$ gilt:

$$\chi(G) \leq \mu(G) + 1$$

Diese Vermutung bringt - wie vorhin bereits gesagt - die Chromatische Zahl und die Colin de Verdière Invariante in Verbindung. Vielmehr noch: Diese Vermutung würde - falls sie sich als wahr erweist - sogar das Vier-Farben Problem auf einen Schlag lösen. Um dies nachzuvollziehen, erinnern wir uns an das Kapitel 4, in welchem gezeigt werden konnte, dass die Colin de Verdière Invariante eines Graphen kleiner oder gleich 3 ist, wenn dieser Graph planar ist. Da sich das Vier-Farben Problem nur auf planare Graphen bezieht, können wir uns dies zu Nutze machen. Da wir wissen, dass jeder planare Graph eine Colin de Verdière Invariante kleiner oder gleich 3 hat, kommen wir mithilfe der Vermutung von Colin de Verdière auf folgende Aussage über die Chromatische Zahl von planaren Graphen:

$$\chi(G) \leq 3 + 1 = 4. \tag{5}$$

Diese Aussage würde das Vier-Farben Problem direkt beweisen, da die Chromatische Zahl jedes planaren Graphen (also die minimale Anzahl Farben die man für valide Knotenpunkteinfärbung dieser Graphen benötigt) kleiner oder gleich 4 ist. Wir sehen also; ein Beweis des Vier-Farben Problems würde sich mit dieser Vermutung sehr leicht ergeben. Doch leider wurde diese Vermutung bis Dato noch nicht allgemein bewiesen. Man bemerke nämlich, dass diese Vermutung sich nicht nur auf planare Graphen fokussiert (also $\mu(G) \leq 3$), sondern für beliebige Werte der Colin de Verdière Invariante. Allerdings lässt sich diese Vermutung durchaus für Spezialfälle beweisen. So zum Beispiel für komplette Graphen.

Für komplette Graphen K_n lässt sich die Vermutung $\chi(G) \leq \mu(G) + 1$ leicht beweisen. Wir wissen, dass die Chromatische Zahl eines Kompletten Graphen K_n immer gleich n sein muss, da jeder Knotenpunkt per Definition mit jedem anderen Knotenpunkt des Graphen verbunden

sein muss und somit auch mit einer anderen Farbe eingefärbt werden muss. Wie wir in Kapitel 3.2 zeigen konnten, ist die Colin de Verdière Invariante $\mu(K_n) = n - 1$.

Wir kommen also zu folgender Gleichung:

$$n = \chi(K_n) \leq \mu(K_n) + 1 = (n - 1) + 1 = n.$$

Die Vermutung stimmt also sicher für jeden beliebigen kompletten Graphen K_n . \square

Auch für leere Graphen (Also Graphen mit $V(G) = \{1, \dots, n\}$ und $E(G) = \emptyset$) lässt sich diese Vermutung leicht beweisen. Da keine Knotenpunkte miteinander verbunden sind, können alle mit der gleichen Farbe eingefärbt werden. Für die Chromatische Zahl haben wir also $\chi(G) = 1$. Wie wir aus dem Kapitel 3.3 wissen, ist die Colin de Verdière Invariante für leere Graphen gleich 1 (Wir verwenden hier die Notation $\overline{K_n}$ für leere Graphen mit n Knotenpunkten). Die Vermutung stimmt auch in diesem Fall, da $\chi(\overline{K_n}) = 1 \leq 2 = \mu(\overline{K_n}) + 1$ stimmt. \square

Die Vermutung 6.2.1 lässt sich ebenfalls noch für einige andere Spezialfälle beweisen. Mehr noch: diese Vermutung stimmt sicher für alle Graphen für die $\mu(G) \leq 4$ gilt [4]. Jedoch konnte bis heute noch kein allgemeiner Beweis für beliebige Graphen G gefunden werden.

Die Vermutung von Colin de Verdière liesse sich allerdings durch die berühmte Hadwiger-Vermutung beweisen.

Vermutung 6.2.2 *Hadwigers Vermutung* [5]

Sei $h(G)$ die Hadwiger-Zahl und $\chi(G)$ die Chromatische Zahl des Graphen G . So gilt in jedem Fall $\chi(G) \leq h(G)$.

Hadwigers Vermutung ist eine Verallgemeinerung des Vier-Farben Problems [11] und ist das wohl berühmteste ungelöste Problem in der heutigen Graphentheorie. Die Hadwiger-Zahl $h(G)$ ist hierbei definiert als die Anzahl Knotenpunkte des grössten kompletten Graphen K_h , den man durch Kontraktion von Kanten des Graphen G erhalten kann.

Da die Colin de Verdière Invariante minoren-monoton ist, lässt sich zeigen, dass

$$h(G) \leq \mu(G) + 1 \tag{6}$$

für alle Graphen G gilt [5]. Wenn wir annehmen, dass Hadwigers Vermutung stimmt, könnten wir mithilfe der Gleichung (6) sagen:

$$\chi(G) \leq h(G) \leq \mu(G) + 1.$$

Dies würde die Vermutung 6.2.1 beweisen.

6.3 Die Geschichte des Vier-Farben Problems

In diesem Abschnitt werden wir die Geschichte des Vier-Farbenproblems kurz zusammenfassen. Für einen tieferen Einblick in die Geschichte des Vier-Farben Problems wird auf [12] verwiesen.

6.3.1 Der Ursprung des Vier-Farben Problems

Das erste nachweisliche Mal, dass die Frage nach dem Einfärben von Karten und der dazu maximal benötigten Anzahl Farben aufkam, war im Jahr 1852. Auguste de Morgan, Professor am University College in London, schrieb einen Brief an den Mathematiker und Physiker William Rowan Hamilton. In diesem Brief stellte er Hamilton eine Frage, die er ursprünglich von einem seiner Schüler gestellt bekommen hatte, nämlich von Francis Guthrie. Seine Frage sei, ob und weshalb man maximal vier Farben brauche, um jede beliebige Karte valide einzufärben. Francis Guthrie sei auf diese Vermutung gekommen, als er eine Landkarte von England einfärben wollte. Wie wohl weder ihm, Hamilton oder de Morgan bewusst war, gilt dies als der Ursprung des Vier-Farben Problems. Zwar könnte diese Tatsache schon früher von Kartographen und Kartographinnen als wahr angenommen worden sein, doch der Brief von de Morgan auf die Frage von Guthrie hin gilt als erste rein mathematische Formulierung des Vier-Farben Problems [12].



Abb. 25: Francis Guthrie (a), August de Morgan (b), William Rowan Hamilton (c)
(Von Links nach Rechts)

Doch weder Guthrie, de Morgan oder Hamilton lebten lange genug, um den Beweis dieser so einfach erscheinenden Vermutung zu erleben. Dieser folgte erst circa 120 Jahre später von Kenneth Appel und Wolfgang Haken. Doch bis es zu diesem finalen Resultat kam, entstanden unzählige innovativ mathematische Methoden bei dem Versuch das Vier-Farben Problem zu lösen.

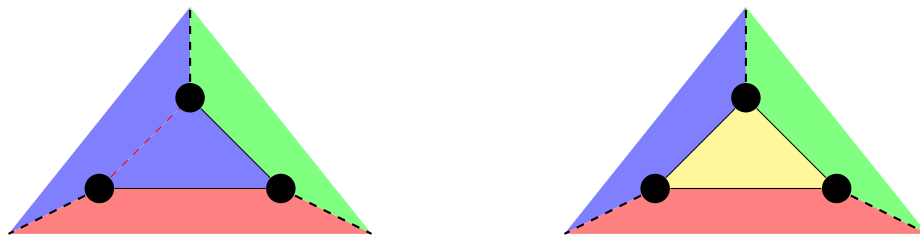
Über diesen Zeitraum hinweg war das Vier-Farben Problem die Ursache für praktisch alle Entwicklungen in der gesamten Graphentheorie. Seit dem Beweis des Vier-Farbenproblems im Jahre 1976 wuchs die Graphentheorie exponentiell schnell und ist heute ein nicht mehr wegzudenkender Bestandteil der modernen Mathematik [8]. Folgend werden wir nur die wichtigsten Schritte, die zum Beweis von Kenneth Appel und Wolfgang Haken geführt haben, betrachten.

6.3.2 Minimale Gegenbeispiele

Um nun ein erstes solches Zwischenresultat zu erhalten, müssen wir zunächst verstehen, was es überhaupt heisst, das Vier-Farben Problem zu lösen. Dies können wir mithilfe elementarer Logik etwas genauer fassen. Das Vier-Farben Problem sagt aus, dass jede beliebige Karte mit vier oder weniger Farben eingefärbt werden kann. Einen Beweis dieser Aussage erhielt man, wenn man beweisen könnte, dass es keine Karte geben kann, die mehr als vier Farben für eine valide Einfärbung benötigt. Ebenso hätte man einen Gegenbeweis für das Vier-Farben Problem, wenn mindestens eine Karte existiert, die nicht mit vier oder weniger Farben eingefärbt werden könnte. Somit kommen wir zu einem ersten wichtigen Begriff auf dem Weg zum Beweis des Vier-Farben Problems: minimale Gegenbeispiele. Wir nennen eine Karte ein minimales Gegenbeispiel, wenn diese Karte sich nicht mit vier Farben einfärben lässt, aber wenn ein beliebiges Gebiet entfernt wird, so ist die Karte mit vier Farben einfärbbar. Somit müssten alle Karten, die sich nicht mit vier Farben einfärben lassen würden, mindestens ein solches minimales Gegenbeispiel enthalten, oder selbst ein minimales Gegenbeispiel sein. Das Vier-Farben Problem ist bewiesen, wenn es sich zeigen liesse, dass keine solchen minimalen Gegenbeispiele existieren können.

In einem nächsten Schritt liess sich zeigen, dass solche minimalen Gegenbeispiele kein Digon (Ein Polygon mit zwei Seiten), kein Dreieck und kein Viereck enthalten können. Wir betrachten nur den Beweis im Falle des Dreiecks, der Beweis für das Digon funktioniert gleich.

Angenommen, ein solches minimales Gegenbeispiel enthält ein Dreieck. Wenn wir nun eine Kante des Dreiecks löschen, und somit ein Gebiet der Karte löschen, muss die dann erhaltene Karte mit vier Farben einfärbbar sein. Fügen wir aber die gelöschte Kante und somit das Dreieck wieder hinzu, so lässt sich die Karte ebenfalls mit vier Farben einfärben. Dies stimmt sicher, da nur drei Gebiete an das Dreieck grenzen (siehe Abbildung 28) und das Dreieck somit immer mit einer vierten Farbe eingefärbt werden kann. Doch dies führt zu einem Widerspruch mit der Annahme, dass die erste Karte ein minimales Gegenbeispiel ist und sich somit nicht mit vier Farben einfärben lässt. Dies beweist also, dass kein minimales Gegenbeispiel (falls überhaupt eines existiert) ein Dreieck enthalten kann [12]. \square



(a) Eine Kante des Dreiecks wurde gelöscht, die Karte muss also 4-einfärbbar sein.

(b) Die Kante des Dreiecks wurde wieder hinzugefügt, die Karte muss aber immer noch 4-einfärbbar sein.

Abb. 26: Ein Ausschnitt aus einem minimalen Gegenbeispiel, der zeigt, dass kein minimales Gegenbeispiel ein Dreieck enthalten kann.

Der Beweis dafür, dass ein minimales Gegenbeispiel kein Viereck enthalten kann, zeigte Alfred Bray Kempe 1879 mithilfe der nach ihm benannten "Kempe-Ketten" (englisch: *Kempe chains*) [13].

6.3.3 Unvermeidbare Mengen

Ein wichtiger Bestandteil des Beweises des Vier-Farben Problems sind die sogenannten unvermeidbaren Mengen. Damit sind Bestandteile einer Karte gemeint, die sicher in jeder beliebigen Karte vorkommen müssen. Zunächst muss man allerdings voraussetzen, dass in jedem Knotenpunkt der Karte mindestens drei Kanten zusammenkommen (wir nennen solche Karten von nun an kubische Karten). Dies kann man, da die Einfärbung der Karte sich nicht verändert, wenn man Knotenpunkte, in denen eine oder zwei Kanten zusammenkommen, weglässt. Um eine erste unvermeidbare Menge zu sehen, zeigen wir, dass jede kubische Karte mindestens ein Gebiet enthalten muss, das genau fünf oder weniger Nachbargebiete hat. Für diesen Beweis brauchen wir den berühmten Polyedersatz von Leonhard Euler:

$$v - e + f = 2 \tag{7}$$

Wobei v die Anzahl Knotenpunkte, e die Anzahl Kanten und f die Anzahl Gebiete ist.

Für den Beweis nehmen wir an, dass es eine kubische Karte gibt, die kein Gebiet enthält, das fünf oder weniger Nachbargebiete hat. Da es sich um eine kubische Karte handelt, wissen wir, dass $\frac{3}{2}v \leq e$ gelten muss. Nach der Annahme muss es mindestens $\frac{6}{2}f$ Kanten geben, da sicher jedes Gebiet von mindesten 6 Kanten eingeschlossen ist. Also können wir schreiben: $3f \leq e$, oder umgeformt: $f \leq \frac{1}{3}e$. Fügen wir diese Ungleichungen in die Gleichung (3) ein, so erhalten wir:

$$2 = v - e + f \leq \frac{2}{3}e - e + \frac{1}{3}e = 0.$$

Doch dies ist ein Widerspruch, da wir $2 \leq 0$ haben. Daraus folgt also, dass jede kubische Karte mindestens ein Gebiet mit fünf oder weniger Nachbargebieten enthält. \square

Wir haben also eine erste unvermeidbare Menge gefunden:

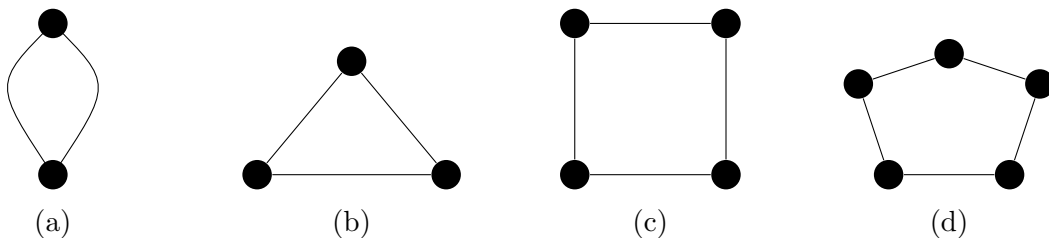


Abb. 27: Eine erste unvermeidbare Menge; jede kubische Karte muss also mindestens eines dieser Elemente enthalten.

Während des zwanzigsten Jahrhunderts wurden unzählige solche unvermeidbaren Mengen gefunden, zum Beispiel von George Birkhoff, der später auch das in der Graphentheorie berühmte Chromatische Polynom einführte [12]. Doch um zu sehen, inwiefern diese unvermeidbaren Mengen für die Lösung des Vier-Farben Problems wichtig waren, müssen wir noch reduzierbare Konfigurationen betrachten.

6.3.4 Reduzierbare Konfigurationen

Während des zwanzigsten Jahrhunderts arbeiteten viele Mathematiker und Mathematikerinnen, die das Vier-Farben Problem zu lösen versuchten in einem anderem Gebiet. Sie erarbeiteten eine völlig neue Theorie der sogenannten Reduzierbarkeit und somit auch eine Theorie über die Menge der reduzierbaren Konfigurationen. Zu den prägendsten Mathematiker, die diese Theorie aufstellten gehörten Alfred Kempe, George Birkhoff und Heinrich Heesch [14].

Zunächst zum Begriff der Konfiguration: Eine Konfiguration ist in diesem Kontext ein Teilgraph einer Triangulation, also eines maximal planaren Graphen. Dieser Teilgraph besteht aus einem sogenannten *Ring* und dessen Inneres [14]. Mit einem Ring ist hier einfach ein Polygon mit k Knotenpunkten gemeint. Zudem bemerken wir noch, dass hierbei von Knotenpunkteinfärbungen und nicht von Flächeneinfärbungen gesprochen wird. Dies ist typisch für die Entwicklung der Graphentheorie im Zusammenhang mit dem Vier-Farben Problem; in den ersten Problemstellungen und Lösungsversuche von Guthrie oder Kempe wurden nur Flächeneinfärbungen von Karten betrachtet. Im Verlaufe der Zeit wurde dann immer häufiger - so auch von Appel und Haken - von Knotenpunkteinfärbungen gesprochen, da sich Flächeneinfärbungen, wie in Kapitel 5.2 gesehen, leicht in Knotenpunkteinfärbungen des dualen Graphen übersetzen lassen.

Als nächstes nennen wir eine Konfiguration reduzierbar, wenn man durch gewisse Standardmethoden zeigen kann, dass sie kein minimales Gegenbeispiel sein kann. In Kapitel 6.3.2 und in der Abbildung 26 haben wir bereits eine solche reduzierbaren Konfigurationen gesehen. Wir konnten dort zeigen, dass kein minimales Gegenbeispiel ein Dreieck enthalten kann - die Konfigurationen, die einen Dualgraphen einer Karte mit einem Dreieck wie in Abbildung 26 enthalten sind also sicher reduzierbar.

Somit kommen wir auch schon zu der finalen Beweisidee, die schliesslich zur Lösung des Vier-Farben Problems geführt hat.

Das Vier-Farben Theorem ist bewiesen, wenn sich eine unvermeidbare Menge von reduzierbaren Konfigurationen finden lässt.

Um zu sehen, dass dies wirklich als Beweis des Vier-Farben Problems gilt, erinnern wir uns an das Kapitel 6.3.2. Dort haben wir gesehen, dass das Vier-Farben Problem bewiesen ist, wenn man zeigen kann, dass keine minimalen Gegenbeispiele existieren. Das liesse sich genau dann zeigen, wenn man eine unvermeidbare Menge von reduzierbaren Konfigurationen finden könnte: Da es eine unvermeidbare Menge ist, müsste jeder Graph mindestens eine der Konfigurationen aus dieser Menge enthalten. Doch da diese Konfigurationen aus der Menge reduzierbar sind, können sie nicht in einem minimalen Gegenbeispiel existieren. Gleichzeitig muss aber jedes minimale Gegenbeispiel - sollte eines existieren - eine Konfiguration aus der unvermeidbaren Menge von reduzierbaren Konfigurationen enthalten. Daraus folgt also, dass kein minimales Gegenbeispiel existieren kann, da es zwingend eine reduzierbare Konfiguration enthalten würde. Auf diese Suche nach einer unvermeidbaren Menge an reduzierbaren Konfigurationen begaben sich (nebst anderen) Kenneth Appel und Wolfgang Haken.

6.3.5 Die Lösung von Kenneth Appel und Wolfgang Haken

Im Jahre 1972 begannen Wolfgang Haken und Kenneth Appel mit ihrer Arbeit an dem Vier-Farben Problem. Wolfgang Haken, der deutsche Mathematiker, verbrachte bis dahin schon einige Zeit damit. Zu Bekanntheit brachte er es allerdings schon vor der Arbeit am Vier-Farben Problem und seiner Zusammenarbeit mit Kenneth Appel, denn er erzielte phänomenale Fortschritte im Bereich der Knotentheorie. Ebenfalls forschte Haken an der Poincaré-Vermutung und brachte es sogar zustande, das Problem auf 200 Spezialfälle zu reduzieren. Von diesen 200 konnte er 198 fertigstellen - an den letzten zwei Fällen arbeitete er 13 Jahre lang ohne Erfolg und gab sie schliesslich auf, um am Vier-Farben Problem zu arbeiten [12].

Im Gegensatz zu allen anderen Mathematikern und Mathematikerinnen, die nach einer unvermeidbaren Menge an reduzierbaren Konfigurationen suchten, suchte Haken direkt nach unvermeidbaren Mengen, die Konfigurationen enthielten, die mit relativ grosser Wahrscheinlichkeit reduzierbar waren. Dieses Vorgehen war ungewöhnlich und wurde auch von weiteren sehr prägenden Figuren in der Entwicklung der Graphentheorie und dem Vier-Farben Problem abgelehnt. So zum Beispiel lehnte auch der einflussreiche Heinrich Heesch Hakens Vorgehen ab, dessen Arbeit die Suche nach einer unvermeidbaren Menge an reduzierbaren Konfigurationen vorantrieb und zentrale Vorgehensweisen für den finalen Beweis entwickelte. Nichtsdestotrotz arbeitete Haken weiter - zunächst suchte er nach unvermeidbaren Mengen, um sie erst in einem späteren Schritt auf ihre Reduzierbarkeit zu testen.

Doch bei dieser Arbeit kam ein neues Problem für Haken hinzu; dieses Überprüfen der Reduzierbarkeit einzelner unvermeidbarer Konfigurationen konnte niemals von Hand gemacht werden. Man benötigte einen Computer dazu. Nicht nur irgendeinen Computer, denn die Überprüfung jeder einzelnen Konfiguration hätte mit Hakens ersten Ansätzen immense Berechnungen benötigt. Aus diesen Gründen erwägte Haken sogar, seine Arbeit am Vier-Farben Problem niederzulegen, da die Berechnungen nicht in absehbarer Zeit für damalige Computer machbar schienen. Doch zu diesem Zeitpunkt kam Kenneth Appel ins Spiel. Er besuchte eine Vorlesung von Haken und kam nach dieser auf Haken zu und offerierte ihm die Zusammenarbeit, da er sich sehr gut mit dem Programmieren von Computern verstand. Seine Fähigkeiten im Bereich des Computer-Programmierens waren, wie sich später zeigen würde, von unschätzbarem Wert für die Lösung des Vier-Farben Problems [12].



Abb. 28: Kenneth Appel (am Computer) und Wolfgang Haken beginnen ihre Arbeit am Computer.

Die grösste Herausforderung ihrer Arbeit war, das sogenannte Entladungsverfahren (englisch: *discharging procedure*) an die verschiedenen Konfigurationen anzupassen [14]. Durch dieses Verfahren lässt sich eine Konfiguration auf ihre Reduzierbarkeit prüfen.

Das geschieht, indem man jeder Kartenfläche eine "Ladung" zuschreibt und diese einzelnen Ladungen dann unter Erhaltung der Gesamtladung der Konfiguration auf Nachbargebiete verschiebt (deshalb auch *Entladungsverfahren*). Entwickelt und zum ersten Mal vorgestellt wurde dieses Verfahren von dem oben genannten Heinrich Heesch im Jahr 1969. Für einen ausführlicheren Einblick in das Entladungsverfahren wird auf Heeschs Originalarbeit verwiesen [15].

Appel und Haken entwickelten aus diesen Entladungsverfahren Algorithmen, die - wie sie in [14] berichteten - technisch simpler ausfielen als in vorhergehenden Versuchen. Somit konnten sie diese Algorithmen auch von Hand in den Computer implementieren. Wie wir wissen, überprüften sie die von ihnen gefundenen Konfigurationen zunächst nicht auf ihre Reduzierbarkeit. Sie fokussierten sich vielmehr auf sogenannte *geographisch gute Konfigurationen* [15]. Im Jahr 1974 gelang es Appel und Haken zu zeigen, dass endliche unvermeidbare Mengen von geographisch guten Konfigurationen existieren. Zusätzlich konnten sie zeigen, dass es möglich ist, solche Mengen mithilfe eines Computers zu konstruieren [16]. Ihre nächste Aufgabe war es nun, herauszufinden, wie sich eine solche Konstruktion auch effektiv umsetzen liess. Dazu experimentierten sie mit einigen Spezialfällen der ganzen unvermeidbaren Menge und programmierten den Computer für diese Fälle. Später erweiterten sie die Algorithmen für allgemeinere Fälle. Ab dann liessen sie den Computer arbeiten [12]. Appel und Haken meinten später dazu, der Computer erarbeitete komplexe Strategien mithilfe der Tricks die er "gelernt" hatte. Bald schon wären es solch clevere Strategien gewesen, dass sie selbst nicht auf diese Ideen gekommen wären. Somit habe der Computer sie als Programmierende intellektuell überstiegen [12].

Der Algorithmus spuckte schliesslich eine unvermeidbare Menge U mit weniger als 2000 Konfigurationen aus, die speziell so konstruiert wurden, dass sie in absehbarer Zeit auf ihre Reduzierbarkeit geprüft werden konnten [14].

Für die Reduzierbarkeits-Überprüfung brauchten Haken und Appel allerdings zunächst Hilfe. Diese erhielten sie von John Koch. Zusammen mit ihm gelang es nach vielen Anpassungen, die oben genannte unvermeidbare Menge mit weniger als 2000 Konfigurationen zu finden.

Als es klar war, dass sie eine solche fehlerfreie unvermeidbare Menge konstruiert hatten, mussten sie zu Beginn des Jahres 1976 mit der Überprüfung der Reduzierbarkeit beginnen. Dazu verwendeten sie die erwähnten Entladungsvorgänge und programmierten den Computer. Daraufhin suchten sie sich aus der unvermeidbaren Menge U Konfigurationen aus, die Schwierigkeiten beim Überprüfen aufwiesen und passten ihre Algorithmen entsprechend an. Schliesslich benötigten Haken, Appel und Koch 487 solche Entladungsregeln [12]. Ihr Algorithmus basierte nicht auf den anspruchsvollsten Methoden des Entladungsverfahrens, sondern war vor allem auf Geschwindigkeit und Effizienz ausgelegt [14].

Bei den Überprüfungen der Konfigurationen hatten Appel, Haken und Koch jedoch sehr viel Glück. Obwohl das Resultat ihrer massiven Computerberechnungen nicht sicher war, erlaubte ihnen das Computerzentrum der Universität Illinois die Benutzung der dortigen Computer. Wahrscheinlich hätte kaum eine andere Institution ihnen so viel Computer-Berechnungszeit ermöglicht. Zeitgleich wurde für die Reduzierbarkeitsüberprüfung auch ein Computer auf dem Campus der Universität von Chicago verwendet: Die Forschenden schickten die zu überprüfenden Konfigurationen nach Chicago und erhielten dann am nächsten Tag die Resultate. Als die Universität Illinois dann im März 1976 einen neuen, noch leistungsstärkeren Computer kaufte, erreichten Haken und Appel noch schnellere Berechnungen. Dieser neue Computer verrichtete seine Arbeit noch viel schneller als von Appel und Haken gedacht und sparte ungefähr zwei Jahre an Berechnungszeit. Erfreulich schnell, Ende Juni im Jahr 1976, war es soweit. Sie hatten die komplette unvermeidbare Menge konstruiert und jede einzelne Konfiguration dann mithilfe des neuen Computers auf ihre Reduzierbarkeit geprüft. Wolfgang Haken und Kenneth Appel erreichten ihre erste Konstruktion einer unvermeidbaren Menge an reduzierbaren Konfigurationen.

Als Appel die letzten Konfigurationen auf ihre Reduzierbarkeit geprüft hatte, schrieb er den folgenden Satz auf eine Wandtafel der Universität von Illinois: *Modulo careful checking, it appears that four colors suffice* [12]. Zu Deutsch: *Nach sorgfältigem Überprüfen scheint es, dass vier Farben ausreichen.*

Doch bevor Haken und Appel ihre Resultate der Öffentlichkeit vorstellen konnten, mussten sie ihre unvermeidbare Menge an reduzierbaren Konfigurationen in mühsamer Handarbeit auf Fehler überprüfen. Dies musste allerdings schnell geschehen, da vermutet wurde, dass andere Mathematiker auch sehr nahe an einer Lösung des Vier-Farben Problems standen. Also begaben sich Haken und Appel zusammen mit ihren Kindern Dorothea und Armin Haken, sowie Laurel, Peter und Andrew Appel, auf die Fehlersuche. Gefundene Fehler - meistens Tippfehler - wurden entweder direkt korrigiert oder nochmals neu berechnet. Falls auch bei diesen neuen Berechnungen Schwierigkeiten auftraten, war es nicht schwer, die betroffenen Konfigurationen durch andere zu ersetzen. Nach unzähligen Stunden dieser intensiven Arbeit, fühlten sich Appel und Haken selbstbewusst genug, ihr Resultat der Öffentlichkeit zu präsentieren. Sie veröffentlichten am 22. Juli 1976 einen knappen Vordruck ihres Beweises. Doch bis sie ihren vollständigen fehlerfreien Beweis publizierten, verging nochmals mehr als ein Jahr, denn Appel und Haken entdeckten einige Konfigurationen in der Menge, die sich wiederholten oder bereits Teil einer grösseren Konfiguration waren. Nach all diesen Fehlerbereinigungen enthielt ihre unvermeidbare Menge an reduzierbaren Konfigurationen anstelle von anfänglichen 1936 nur noch 1482 Konfigurationen. Ihren finalen Beweis publizierten sie in der Dezemberausgabe des *Illinois Journal of Mathematics* im Jahre 1977 [12]. Kenneth Appel und Wolfgang Haken hatten es geschafft: sie hatten das Vier-Farben Problem - 124 Jahre nachdem es zum ersten Mal gestellt wurde - gelöst.

7 Schlusswort

Veranlasst durch den finalen Beweis von Haken und Appel in Kapitel 6.3.5, wird zum Abschluss dieser Arbeit kurz auf die Bedeutung von Computern in der modernen Mathematik eingegangen. Schliesslich folgt ein Fazit zu dieser Arbeit.

7.1 Computer in der Mathematik

Der Beweis des Vier-Farben Problems gilt als einer der ersten mathematischen Beweise, die nur mithilfe eines Computers durchgeführt werden konnten. Die Lösung des Vier-Farben Problems steht am Anfang einer neuen "Ära" in der Mathematik, in welcher gewisse Beweise nur noch von Computern berechnet und "verstanden" werden können, oder die Computer sogar selber mit neuen Beweismethoden aufkommen können. Im Wesentlichen etablierte sich der Computer von der reinen Rechenhilfe zu einem zentralen Objekt in der Suche nach neuen mathematischen Beweisen.

Als die Lösung des Vier-Farben Problems bekannt gegeben wurde, waren zunächst viele Mathematiker und Mathematikerinnen skeptisch. Grund dafür war die Rolle, die der Computer in Appels und Hakens Beweis spielte: es wurde oftmals gesagt, dass ein Beweis, den Mathematiker nicht alleine "von Hand" nachvollziehen konnten, nicht als Beweis gelten könne. Ähnliche Diskussionen entstehen auch noch heute. Es gibt Meinungen, die sagen, dass das Ziel in der Mathematik sein sollte, Verständnis und Erkenntnisse zu gewinnen - diese könne man nicht durch einen unverständlichen Computerbeweis bekommen [17]. Andere Meinungen hingegen sagen, dass es eine romantische Vorstellung sei, dass mathematische Beweise immer so einfach sein werden, dass sie sich von einem Menschen nachvollziehen lassen und dass die Welt der Mathematik sich daher daran gewöhnen müsse, dass mehr und mehr mathematische Evidenz aus Computern resultiere [17].

Grundsätzlich kann man heute zwischen zwei Arten von Computerhilfe in der Suche nach Beweisen in der Mathematik unterscheiden: dem computergestützten Überprüfen eines Beweises oder dem computergenerierten Beweis. Computergestütztes Überprüfen eines Beweises funktioniert folgendermassen: Der Benutzer oder die Benutzerin gibt Definitionen eines mathematischen Konzepts oder Objekts in eine Prüf-Assistent Software (englisch: *proof assistant software*) ein, und bringt der Software so mathematische Grundlagen oder kompliziertere mathematische Ideen bei. Anschliessend können die Forschenden ihre Aussage des Beweises in den Prüf-Assistenten, also den Computer, eingeben und dieser kann dann beantworten, ob die Wahrheit oder die Unwahrheit dieser Aussage direkt als Fakt auf dem ihm "beigebrachten" mathematischen Wissen folgt. Falls dies noch nicht klappt, müssen die Überprüfer dem Computer neue Informationen, also mehr Wissen geben. Beweisassistenten zwingen Mathematiker und Mathematikerinnen folglich dazu, die Logik ihres Arguments trotzdem noch selbst aufzustellen; der Computer ergänzt dann nur noch Beweisschritte, die unbewusst oder bewusst vom Menschen übersprungen wurden [18].

Bei dem computergenerierten Beweis allerdings, kann der Computer diese Logik eines mathematischen Arguments selber aufbauen. Dies kann zum Beispiel mittels Künstlicher Intelligenz (KI) geschehen. Solch ein beeindruckendes Beispiel präsentierte das Team von Googles DeepMind mit der KI-Software *AlphaTensor*. Diese Software beruht auf AlphaZero, welche ebenfalls eine KI-Software ist, die darauf programmiert wurde, in einem Brettspiel wie Schach die besten Spielstrategien zu entwickeln und zeitgenössische Schachcomputer zu übertrumpfen. Mit AlphaTensor begaben sie sich auf eine Reise von AlphaZero - dem besten Schachcomputer - zu einer

KI-Software, die ungelöste mathematische Probleme bewältigen sollte [19]. Ein neuster Erfolg von AlphaTensor war der Fund eines neuen Algorithmus für Matrizenmultiplikation, der effektiver funktioniert als bisher bekannte Algorithmen für Matrixmultiplikationen [19].

Grundsätzlich hat die Mathematik eine spannende Zeit vor sich. Es wird sich zeigen, ob sich Prüfassistenten und computergenerierte Beweise weiter durchsetzen können und in der Fachwelt entsprechend Akzeptanz finden.

7.2 Fazit

Wie wir sehen, werden Computer in der Mathematik wahrscheinlich zukünftig eine sehr grosse Rolle spielen. Ich denke auch, dass die Colin de Verdière Invariante noch viel für Forschende zu bieten hat, da wie zum Beispiel in Kapitel 6.2 noch ungelöste Vermutungen existieren, die in einem weiten Anwendungsbereich innerhalb der Mathematik Nutzen finden könnten.

In meiner Arbeit habe ich das Ziel verfolgt, die Verbindung der Colin de Verdière Invariante und dem Vier-Farben Problem aufzuzeigen. Auf diesem Weg habe ich sehr viel lernen können. Ich musste mir viele Grundlagen in der linearen Algebra selbstständig aneignen und mich an den Umgang mit diesen Grundlagen in den Beweisführungen dieser Arbeit gewöhnen. Natürlich habe ich auch sehr viel Einsicht in die Colin de Verdière Invariante gewonnen – einen Bereich innerhalb der algebraischen Graphentheorie, über den ich anfänglich noch gar nichts wusste und daher mit dieser Arbeit auch alle behandelten Aspekte von Grund auf lernen musste. Dabei habe ich auch zusätzlich viel über die Geschichte des Vier-Farben Problems und den ersten Beweis dessen durch Appel und Haken mitgenommen.

Nebst diesen vielen inhaltlichen, mathematischen Bereichen habe ich auch allgemein sehr viel über das Schreiben einer Arbeit wie dieser gelernt, da diese meine erste wissenschaftliche mathematische Arbeit in einem solchen Umfang war. Dazu gehört zum Beispiel das Arbeiten an einem Beweis wie in Kapitel 4, um diesen in all seinen Facetten nachvollziehen zu können. Neu war dabei neben den inhaltlichen Schwierigkeiten auch die Tatsache, dass ich die Beweisschritte meist komplett eigenständig nachvollziehen und dann das Verstandene formulieren musste, da ein solcher Beweis in dieser Detailliertheit nicht im Internet oder in der Literatur zu finden ist. Dies konnte manchmal auch bedeuten, dass sich trotz eines wochenlangen Auseinandersetzens mit einer Frage keine signifikanten neuen Erkenntnisse ergaben. Umso mehr war es eine Erleichterung und Begeisterung, wenn es mir gelang solche, mir anfänglich rätselhafte Fragen zu beantworten. Bei einigen Beweisschritten half mir allerdings meine Betreuungsperson Francesco Antognini weiter und konnte mich auf Lösungsansätze aufmerksam machen. Zudem zählt das Arbeiten mit LaTeX zu einem grossen, arbeitsaufwändigen Lernbereich dieser Arbeit, da ich ebenfalls zum ersten Mal mit diesem Programm gearbeitet habe. Die meisten Graphiken in dieser Arbeit habe ich selbst in LaTeX mit TikzPicture erstellt, was einen grossen Zeitaufwand in Anspruch nahm. Ich hielt diese Graphiken essentiell für die Arbeit, da so die besprochenen – oft sehr abstrakten – Gebiete durch ihre Visualisierung verdeutlicht und auch verständlicher gemacht werden konnten. So kann durch diese Graphiken die Arbeit auch Lesenden ohne das anfänglich erwähnte mathematische Vorwissen einen Zugang in die Welt des Vier-Farben Problems und der Colin de Verdière Invariante ermöglicht werden.

Zum Abschluss kann ich festhalten, dass sich der grosse Arbeitsaufwand für mich sehr gelohnt hat. Das Wissen und die Erfahrung, die ich durch diese Arbeit erlangen konnte, werden mir in meinem zukünftigen Studium in Mathematik bestimmt von grossem Nutzen sein. Ich denke auch, dass mich die wundervollen Gebiete der Graphentheorie, der Topologie und womöglich auch die Colin de Verdière Invariante zukünftig noch beschäftigen und weiter faszinieren werden.

8 Bibliographie

8.1 Literaturverzeichnis

1. H. Van der Holst: *A Short Proof of the Planarity Characterization of Colin de Verdière*, 5.1.1995, Journal of Combinatorial Theory (Series B 65)
2. Université Grenoble Alpes, *Mathematician Yves Colin de Verdière receives the Émile Picard medal from the national Science Academy*, 8.2.2021, <https://international.univ-grenoble-alpes.fr/about/major-personalities/mathematician-yves-colin-de-verdiere-receives-the-emile-picard-medal-from-the-national-science-academy-808169.kjsp?RH=1610011667874>
3. C. de Verdière: *Sur un Nouvel Invariant des Graphes et un Critère de Planarité*, 1990 [Publikationsdatum], 12.2.1987 [Einreichtdatum], Journal of Combinatorial Theory (Series B 50)
4. H. van der Holst, L.Lovász, A. Schrijver: *The Colin de Verdière graph parameter*, 1997 [Verfassungsdatum], 14.09.2014 [Upload-Datum], researchgate.net
5. F. Goldberg, *The Colin de Verdière number of a graph*, November 2010, Ph.D. Thesis, Israel Institute of Technology
6. A. E. Brouwer, W. H. Haemes: *Spectra of Graphs*, (Seite 102), 2012, Springer Verlag
7. P. Läuchli: *Algorithmische Graphentheorie* (Kapitel 11: *Planarität*), 1991, Programm Praxis, vol 9. Birkhäuser, Basel
8. J.A. Bondy, U.S.R. Murty: *Graph Theory* (Kapitel 10 *Planar Graphs*), 2008, Springer Verlag
9. F. Göring: *Short Proof of Menger's Theorem*, Discrete Mathematics 219, 2000, Seiten 295-296
10. John M. Harris, Jeffrey L. Hirst, Michael J. Mossinghoff *Combinatorics and Graph Theory [Zweite Edition]*, 2008, Springer Verlag
11. J. Geelen, B.Gerards, B.Reed, P.Seymour, A.Vetta, *On the odd-minor variant of Hadwiger's conjecture*, 2006, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 99 (1)
12. R.Wilson, *Four Colors Suffice*, 2002, Princeton University Press
13. A. Kempe, *On the Geographical Problem of the Four Colours*, 1879, American Journal of Mathematics, The Johns Hopkins University Press, Volume 2, Seiten 193–220
14. K. Appel, W. Haken, *Every planar map is four colorable*, 26.7.1976, Bulletin of the American Mathematical Society [Volume 82, Number 5]
15. H. Heesch, *Untersuchungen zum Vierfarbenproblem*, 1969, B. I. Hochschulschriften, Bibliographisches Institut, Mannheim
16. K. Appel. W. Haken, *The existence of unavoidable sets of geographically good configurations*, 20.12.1974 [Einreichtdatum], 1976 [Publikationsdatum], Illinois J. Math. 20 (2) 218 - 297

17. J.Rehmeyer, *The Future Role of Computers in Mathematics*, 25.9.2013, Scientific American, <https://blogs.scientificamerican.com/guest-blog/the-future-role-of-computers-in-mathematics/>
18. D.Castelvecchi, *Mathematicians welcome computer-assisted proof*, 1.7.2021, Nature Journal, Vol 595
19. A. Fawzi, M. Balog, B. Romera-Paredes, D. Hassabis, P. Kohli, *Discovering novel algorithms with AlphaTensor*, 5.10.2022, <https://www.deepmind.com/blog/discovering-novel-algorithms-with-alphatensor>

8.2 Abbildungsverzeichnis

- Abb. 1: myScience, *Le mathématicien Yves Colin de Verdière reçoit la médaille émile Picard de l'Académie des sciences*, 15.10.2018 [Publikationsdatum], 30.11.2022 [Zugriffsdatum] https://www.myscience.fr/news/wire/le_mathematicien_yves_colin_de_verdiere_recoit_la_medaille_emile_picard_de_l_academie_des_sciences-2018-univ-grenoble
- Abb. 18(b): D. Eppstein, 2.12.2006 [Publikationsdatum], 2.12.2022 [Zugriffsdatum], Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Heawood_graph#/media/File:7x-torus.svg
- Abb. 23(a): watson.ch, *Wir haben die Kantonsgrenzen neu gezogen – so sieht die Schweiz jetzt aus*, 06.10.2018 [Publikationsdatum], 20.10.2022 [Zugriffsdatum], <https://www.watson.ch/schweiz/die%20welt%20in%20karten/692691450-wir-haben-die-kantonsgrenzen-neu-gezogen>
- Abb. 25(a): P. Marritz, S. Mouton: *Francis Guthrie: A Colorful Life*, 2012 [Publikationsdatum], 16.11.2022 [Zugriffsdatum] The Mathematical Tourist, <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00283-012-9307-y.pdf>
- Abb. 25(b): Sophia Elizabeth de Morgan: *Memoir of Augustus De Morgan*, 1882 [Publikationsdatum], 16.11.2022 [Zugriffsdatum], Longmans, Green, <https://archive.org/details/memoiraugustusd00morggoog/page/n5/mode/2up>
- Abb. 25(c): [Urheber:in unbekannt], Wikipedia, 30.8.2010 [Publikationsdatum], 16.11.2022 [Zugriffsdatum], https://de.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton#/media/Datei:William_Rowan_Hamilton_portrait_oval_combined.png
- Abb. 28: CNRS Images des mathématiques, *Les mathématiques face à l'ordinateur*, 25.6.2015 [Publikationsdatum], 25.11.2022 [Zugriffsdatum], <http://images.math.cnrs.fr/Les-mathematiques-face-a-l-ordinateur.html?lang=fr>