Die Colin de Verdière Invariante und das Vier-Farben Problem

Sascha Szirnyi

Kantonsschule Freudenberg

Ziel und Inhalt der Arbeit

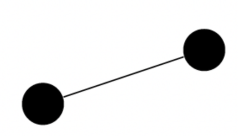
Das Ziel dieser Arbeit war es, eine Schnittstelle zwischen der Graphentheorie und der Topologie zu finden. Die sogenannte Colin de Verdière Invariante liefert eine solche Verbindung. Der Kern und somit auch das Ziel der Arbeit war es, den Zusammenhang dieser Colin de Verdière Invariante mit dem Vier-Farben Problem aufzuzeigen. Um dies zu erreichen, wurde zunächst die Colin de Verdière Invariante und deren Definition eingeführt. Mit diesen Grundlagen widmet die Arbeit sich dann dem Beweis eines Planaritätskriterums für Graphen durch die Colin de Verdière Invariante. Dieses Planaritätskriterium bietet dann die Grundlage für die Verbindung der Colin de Verdière Invariante mit dem Vier-Farben Problem.

Die Colin de Verdière Invariante

Die Colin de Verdière Invariante ist ein algebraischer Parameter für ungerichtete Graphen. Die wohl wichtigste Eigenschaft dieser Invariante ist, dass sie als algebraischer Parameter auch topologische Eigenschaften von Graphen charakterisieren kann. Sie bietet also eine Verbindung der algebraischer Graphentheorie mit der topologischen Graphentheorie. Definiert ist die Colin de Verdière Invariante wie folgt:

$$\mu(G) := \max_{M \in \mathcal{L}_G} \operatorname{korang}(M)$$

Hierbei ist $\mathcal{L}_G$ die Menge aller symmetrischen Matrizen M, welche dem Graphen G zugeordnet werden und einige spezielle Eigenschaften erfüllen. Eine einfache Beispielrechnung für die Colin de Verdière Invariante können wir für den kompletten Graphen K_2 berechnen:



K_2

$$M_{K_2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

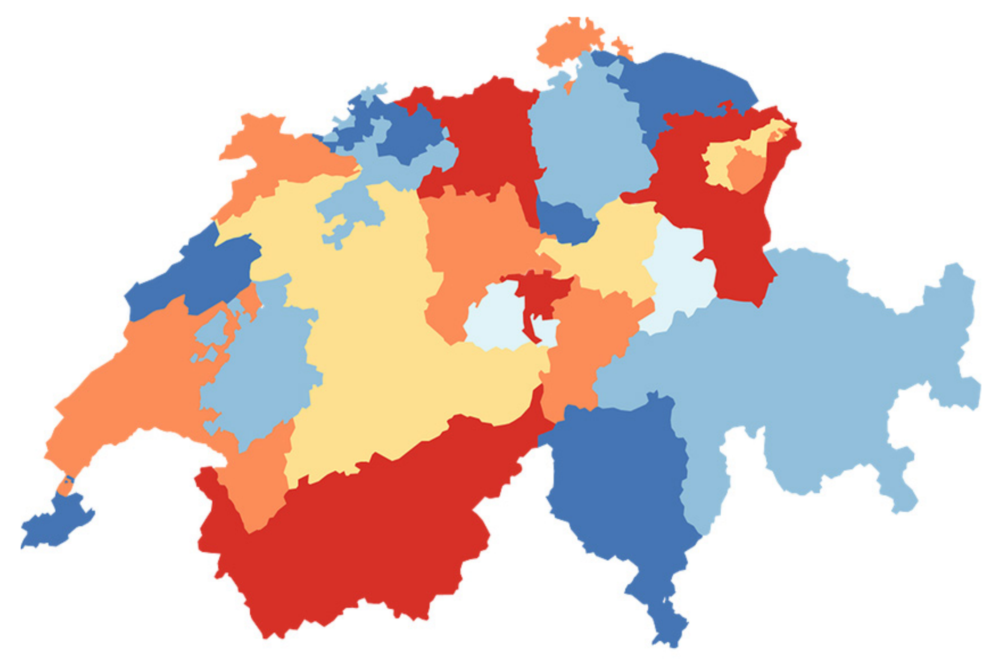
$$\mu(K_2) = \operatorname{korang}(M_{K_2}) = 1$$

Zentral für diese Arbeit war die Eigenschaft der Colin de Verdière Invariante, dass sie genau dann kleiner oder gleich drei ist, wenn der Graph planar ist. Durch die Colin de Verdière Invariante erhält man somit eine Planaritätskriterium für Graphen.

$$G \text{ ist planar} \iff \mu(G) \leq 3.$$

Das Vier Farben Problem

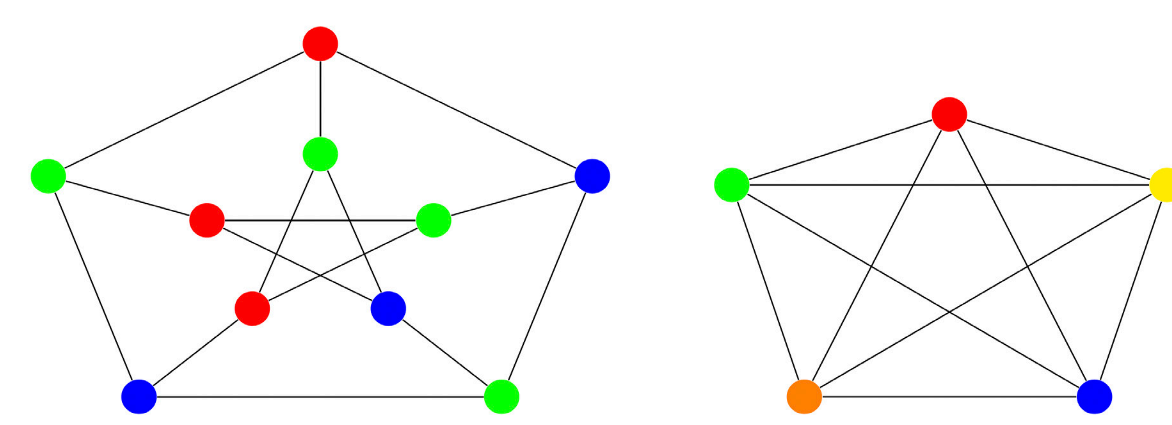
Das Vier-Farben Problem ist wohl eines der bekanntesten Probleme der Mathematik. Die Problemstellung lässt sich zwar einfach verstehen, der Beweis des Vier-Farben Problems erwies sich allerdings als sehr kompliziert und ist noch heute ohne Computerberechnungen unmöglich.



Das Vier-Farben Problem stellt die Frage, ob jede beliebige Landkarte mit maximal vier Farben eingefärbt werden kann, ohne dass sich gleich gefärbte Gebiete berühren.

Für die Verbindung der Colin de Verdière Invariante mit dem Vier-Farben Problem wurde in der Arbeit nochmals eine andere Formulierung des Vier-Farben Problems mit der chromatischen Zahl eingeführt.

$$\chi(G) \leq 4 \quad \text{falls } G \text{ planar ist.}$$



(a) Der Petersen-Graph mit $\chi(G) = 3$ (b) K_5 mit $\chi(G) = 5$

Das Verbindungsstück

Der Kern und auch das Ziel der Arbeit war es, eine Verbindung der Colin de Verdière Invariante mit dem Vier-Farben Problem aufzuzeigen. Diese Verbindung erwies sich, im Vergleich zu den Vorhergehenden Auseinandersetzungen mit der Colin de Verdière Invariante und dem Vier-Farben Problem als sehr kurz und leicht zu verstehen. Dasjenige Stück, das auf eine solche elegante und schlichte Art und Weise die zuvor in der Arbeit behandelten Themengebiete verbindet, ist eine Vermutung von Yves Colin de Verdière, nach dem ebenfalls die Colin de Verdière Invariante benannt ist. Diese Vermutung bringt die Colin de Verdière Invariante und die chromatische Zahl in Verbindung.

$$\chi(G) \leq \mu(G) + 1$$

Sie ist bis heute noch nicht bewiesen. Könnte man dies jedoch tun, wäre das Vier-Farben Problem auf einen Schlag und ohne Computer-Aufwand lösbar.

Fazit und Erkenntnisse

Während dem Schreiben war das Ziel der Arbeit immer klar und konnte dadurch auf eine strukturierte und sinnvolle Weise verfolgt werden. Die Verbindung der Colin de Verdière Invariante mit dem Vier-Farben Problem konnte somit vollständig aufgezeigt werden. Während dem Schreibprozess meiner Arbeit konnte ich sehr viel neues aus den Gebieten der Graphentheorie und der Topologie lernen. Nebst den mathematischen Inhalten konnte ich auch allgemein viel über das Schreiben und Arbeiten an einer wissenschaftlichen mathematischen Arbeit lernen. Dies konnte manchmal auch bedeuten, dass sich trotz eines wochenlangen Auseinandersetzens mit einer Frage keine signifikanten neuen Erkenntnisse ergaben. Umso mehr war es eine Erleichterung und Begeisterung, wenn es dann doch gelang, mir anfänglich rätselhafte Fragen zu beantworten.

Betreut von: Dr. Francesco Antognini